Lösungen zu Blatt 11 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

22. Juli 2011

1. (5 Punkte) Berechnen Sie die in der Vorlesung definierte Richtungsableitung für die Funktion $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3$ im Punkt $(1,3,1)$ in die Richtung $v = (1,1,1)$.

   Lösung : Es gilt
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f, v \rangle,$$
   also ist
$$\frac{\partial f}{\partial(1,1,1)}(1,3,1) = \langle \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 3z^2 \end{pmatrix}_{(1.3.1)}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 6 + 3 = -1\,.$$

2. (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen (a) – (e):

   (a) $A := [0,1]$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

   (b) $A := [0,1[$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

   (c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist $\{x\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

   (d) $A := \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

   (e) Ist $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\epsilon > 0$, die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_\epsilon(x)$ um x mit Radius ϵ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

   Lösung :

   Zu (a): Als abgeschlossenes Intervall ist A abgeschlossen und wegen $A \subseteq B_2(0)$ ist A beschränkt, also ist A kompakt nach Kor. 3.5.

   Zu (b): Da $x_n := 1 - 1/n$ eine Folge in A definiert, deren Grenzwert 1 nicht in A liegt, ist A nicht abgeschlossen und daher nach Kor. 3.5 auch nicht kompakt.

   Zu (c): Als Singleton-Menge ist $\{x\}$ abgeschlossen (Lem. 1.27(c)). Da $\{x\} \subseteq B_1(x)$, ist $\{x\}$ auch beschränkt und somit kompakt nach Kor. 3.5.

Zu (d): A ist nicht kompakt, denn A ist wegen

$$\operatorname{diam} A := \sup \left\{ \|(0,0) - (0,y)\|_2 : \ y \in \mathbb{R} \right\} = \infty \tag{1}$$

unbeschränkt.

Zu (e): Die abgeschlossenen Kugeln sind alle kompakt, denn sie sind abgeschlossen und wegen $\overline{B}_\epsilon(x) \subseteq B_{2\epsilon}(x)$ beschränkt.

3. (5 Punkte) Betrachten Sie die folgenden Funktionen und untersuchen Sie, welche der Funktionen lokale/globale/strenge Minima/Maxima besitzen (dabei kann mehreres gleichzeitig zutreffen oder auch gar nichts). Vervollständigen Sie dazu die folgende Tabelle, indem Sie in jedem Kästchen entweder einen passenden Punkt aus dem Definitionsbereich der entsprechenden Funktion angeben, oder durch "–" kenntlich machen, dass kein solcher existiert. Sie brauchen für Ihre Einträge keine Beweise angeben.

$$\begin{aligned}
&f_0 :]-1,1] \times [-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, && f_0(x,y) := -x + y,\\
&f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, && f_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2,\\
&f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, && f_2(x,y,z) := e^{x^2+y^2+z^2},\\
&f_3 : [-1,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, && f_3(x,y) := e^{x+y},\\
&f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, && f_4(x) := \|x\|_{\max},\\
&f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, && f_5(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x, y = 0,\\ x^2 + y^2 & \text{für} \quad 0 < x^2 + y^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

	globales Min.	strenges globales Min.	lokales Min.	strenges lokales Min.	globales Max.	strenges globales Max.	lokales Max.	strenges lokales Max.
f_0	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	–	–	–	–
f_1	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	–	–	–	–
f_2	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	–	–	–	–
f_3	(-1,0)	(-1,0)	(-1,0)	(-1,0)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)
f_4	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	–	–	–	–
f_5	–	–	–	–	–	–	(0,0)	(0,0)

4. (5 Punkte)

   Es sei $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Geben Sie das Taylorpolynom 5.-Ordnung von f, also $T_5(x,a)$ bei Entwicklung um $a = 1$ an. Bestimmen Sie die Lagrangesche Form des Restglieds $R_5(x,1)$ (Gleichung (3.6) im Skript).
   Lösung auf der nächsten Seite.

Lösung :

Zunächst berechnen wir die Ableitungen von $f(x) = \ln x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \\ f^{(6)}(x) &= -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung $(n \geq 1)$ angeben.

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Für das gesuchte Talorpolynom ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} &T_5^f(x,1) = \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 = \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 \end{aligned}$$

Für das Restglied in der Form von Lagrange erhalten wir:

$$R_5(x) = -\frac{1}{6}\frac{1}{\xi^6}(x-1)^6 \text{ , mit } \xi \in]x, 1[$$