Lösungen zu Blatt 10 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

15. Juli 2011

1. (5 Punkte)

Gegeben seien wie auf dem letzten Blatt

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) := (x-y, xy^2),$$
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad g(x,y) := (e^{x^2 y}, \sin x \cos y^2).$$

Geben Sie die Abbildung $g \circ f$ an und berechnen Sie daraus unter expliziter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel (Theorem 2.28) $D(g \circ f)(x,y)$.

Lösung: Es ist $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x-y, xy^2) = (e^{(x-y)^2 xy^2}, \sin(x-y)\cos(x^2y^4)).$$

Es ist nun

$$D(g \circ f)(x,y) = Dg(f(x,y)) \cdot Df(x,y) \tag{1}$$

Dabei berechnen sich die entsprechenden Größen wie folgt.

$$Df(x,y) = J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

und

$$Dg(x,y) = J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2xye^{x^2y} & x^2e^{x^2y} \\ \cos x \cos y^2 & -2y \sin x \sin y^2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt haben wir für (1) also:

$$D(g \circ f)(x,y) = Dg(f(x,y)) \cdot Df(x,y) =$$
$$= \begin{pmatrix} 2(x-y)xy^2 e^{(x-y)^2xy^2} & (x-y)^2 e^{(x-y)^2xy^2} \\ \cos(x-y)\cos x^2y^4 & -2xy^2 \sin(x-y)\sin(x^2y^4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (3x^2-4xy+y^2)\, y^2\, e^{(x-y)^2xy^2} & 2xy(x^2-3xy+2y^2)\, e^{(x-y)^2xy^2} \\ \cos(x-y)\cos(x^2y^4) - 2xy^4 \sin(x-y)\sin(x^2y^4) & -\cos(x-y)\cos(x^2y^4) - 4x^2y^3 \sin(x-y)\sin(x^2y^4) \end{pmatrix}$$

2. (5 Punkte)

   Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $n \in \mathbb{N}$ und $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf G. Es gebe ein $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $\xi \in G$ gilt $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)| \leq M$. Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig auf G ist.

   Lösung : Seien $x, y \in G$. Da f differenzierbar und G konvex ist, können wir den Mittelwertsatz anwenden. Wir haben somit (mit entsprechendem ξ):

   $$|f(x) - f(y)| = |\nabla f(\xi)(x - y)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)||x_i - y_i| \leq M\|x - y\|_1$$

   Somit ist f lipschitzstetig bezüglich der 1-Norm, mit Lipschitzkonstante M. Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalten sind, ist f auch in jeder anderen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ lipschitzstetig, jedoch mit einer anderen Lipschitztkonstante.

3. (5 Punkte)

   Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ F(x) = \sin(x^2 + \sin x \cos^2 x)$ unter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel. Hierzu zerlegen Sie F als $F(x) = (f \circ g)(x)$ mit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x, y, z) = \sin(x + yz)$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ g(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \sin x \\ \cos^2 x \end{pmatrix}$.

   Lösung : Wir haben

   $$DF(x) = D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$$

   Berechnen wir also zunächst

   $$\begin{aligned} Df(x, y, z) &= (\cos(x + yz), z\cos(x + yz), y\cos(x + yz)) \\ Dg(x) &= \begin{pmatrix} 2x \\ \cos x \\ -2\cos x \sin x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Somit ergibt sich

   $$DF(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) = \cos(x^2 + \sin x \cos^2 x)(2x + \cos^3 x - 2\cos x \sin^2 x).$$

   Wir können unser Ergebnis leicht überprüfen, indem wir $DF(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ direkt berechnen.

4. (5 Punkte)

   Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Berechnen Sie die lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Punkten $x = 0$, $x = 1$ sowie $x = -1$ und skizzieren Sie jeweils den Graphen von $Df(x)$.

   Lösung auf der nächsten Seite.

Lösung : Aus der Definition der Differenzierbarkeit haben wir

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h + o(|h|)$$

Gemeint ist hier also die lineare Abbildung

$$Df(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad Df(x) \cdot h = e^x \cdot h$$

Beachten Sie, dass x ein Label für die unterschiedlichen Abbildungen ist (für jedes x eine andere) und h die Variable. Wir haben somit für die angegebenen x-Werte:

$$\begin{aligned} Df(-1)\,h &= e^{-1}h \\ Df(0)\,h &= h \\ Df(1)\,h &= e\,h \end{aligned}$$

Die Abbildung zeigt die Graphen von $Df(x)$ für $x = -1$ (beige), $x = 0$ (blau) und $x = 1$ (rot):