Lösungen zu Blatt 1 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

13. Mai 2011

1. (5 Punkte) Es sei A eine nichtleere Menge. Zeigen Sie durch Nachrechnen der Vektorraumaxiome, dass es sich bei $V := \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^A$, also bei der Menge der Funktionen von A nach $\mathbb{R}$ um einen $\mathbb{R}$-Vektorraum handelt, wenn man die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation wie folgt definiert: Für $f, g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$(f+g): A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \tag{1a}$$

$$(\lambda \cdot f): A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x). \tag{1b}$$

Im folgenden wird etwas mehr bewiesen, als in der Aufgabe verlangt war, nämlich, dass die obige Aussage sogar dann gilt, wenn man $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper F ersetzt. Die Verweise beziehen sich auf den Anhang zum Skript der Vorlesung.

Um zu zeigen, dass es sich bei $(V, +, \cdot)$ um einen Vektorraum handelt, prüfen wir zunächst, dass $(V, +)$ eine kommutative Gruppe ist (Def. A.1(i)).
Sei dazu $n: A \longrightarrow F$, $n(x) := 0$. Dann gilt

$$\underset{f \in V}{\forall} \quad \underset{x \in A}{\forall} \quad (f+n)(x) = f(x) + 0 = f(x),$$

also $f + n = f$, was beweist, dass n das neutrale Element von V ist (üblicherweise schreibt man auch hier 0 anstatt n).
Definiere nun für beliebiges $f \in V$ ein $\bar{f}: A \longrightarrow F$, $\bar{f}(x) := -f(x)$. Dann gilt

$$\underset{x \in A}{\forall} \quad (f + \bar{f})(x) = f(x) + (-f(x)) = 0,$$

also $f + \bar{f} = n = 0$. Somit ist $\bar{f}$ das inverse Element zu f in $(V, +)$ (wie üblich schreibt man auch hier $-f$ anstatt $\bar{f}$). Assoziativität ergibt sich wie folgt:

$$\underset{f,g,h \in V}{\forall} \quad \underset{x \in A}{\forall} \quad \begin{aligned} \big((f+g)+h\big)(x) &= \big(f(x)+g(x)\big) + h(x) \overset{(*)}{=} f(x) + \big(g(x)+h(x)\big) \\ &= \big(f + (g+h)\big)(x), \end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ die Assoziativität im Körper F benutzt wurde.

Analog zeigen wir die Kommutativität:

$$\underset{f,g\in V}{\forall}\quad\underset{x\in A}{\forall}\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)\overset{(*)}{=}g(x)+f(x)=(g+f)(x),$$

wobei auch hier bei $(*)$ die Kommutativität der Addition in F benutzt wurde. Somit haben wir gezeigt, dass es sich bei $(V,+)$ um eine kommutative Gruppe handelt.

Um die Eigenschaft Def.A.1(ii) (s. Anhang zum Skript) zu zeigen, berechnen wir

$$\underset{\lambda\in F}{\forall}\quad\underset{f,g\in V}{\forall}\quad\underset{x\in A}{\forall}\quad \begin{aligned}\big(\lambda(f+g)\big)(x)&=\lambda\big(f(x)+g(x)\big)\overset{(*)}{=}\lambda f(x)+\lambda g(x)\\&=\big(\lambda f+\lambda g\big)(x),\end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ die Distributivität in F benutzt wurde. Wir haben somit $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$ (vgl. Gleichung A.2a aus dem Anhang). Analog ist,

$$\underset{\lambda,\mu\in F}{\forall}\quad\underset{f\in V}{\forall}\quad\underset{x\in A}{\forall}\quad \begin{aligned}\big((\lambda+\mu)f\big)(x)&=(\lambda+\mu)f(x)\overset{(*)}{=}\lambda f(x)+\mu f(x)\\&=\big(\lambda f+\mu f\big)(x),\end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ wieder die Distributivität in F benutzt wurde. Somit ist $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$ (vgl. Gleichung A.2b)

Um Def. A.1(iii) zu zeigen betrachten wir

$$\underset{\lambda,\mu\in F}{\forall}\quad\underset{f\in V}{\forall}\quad\underset{x\in A}{\forall}\quad \big((\lambda\mu)f\big)(x)=(\lambda\mu)f(x)\overset{(*)}{=}\lambda(\mu f(x))=\big(\lambda(\mu f)\big)(x),$$

auch hier folgt $(*)$ aus der Assoziativiät in F.

Die letzte noch zu prüfende Eigenschaft, Def. A.1(iv), ergibt sich aus

$$\underset{f\in V}{\forall}\quad\underset{x\in A}{\forall}\quad (1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x).$$

Dies vervollständigt den Beweis, dass es sich beim so definierten $(V,+,\cdot)$ um einen Vektorraum handelt.

2. (5 Punkte) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich:

   (a) $-0.5\big((0,-0.5,2,1)+(5,-1,0,-0.25)\big)\cdot(1,2,-3,4)$.

   (b) $\big|-2(2,2)+0.25(-4,12)\big|$.

   Zu (a):

$$\begin{aligned}&-0.5\big((0,-0.5,2,1)+(5,-1,0,-0.25)\big)\cdot(1,2,-3,4)\\&=-0.5\big(5,-1.5,2,0.75)\big)\cdot(1,2,-3,4)=\left(\frac{-5}{2},\frac{3}{4},-1,\frac{-3}{8}\right)\cdot(1,2,-3,4)\\&=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+3-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Zu (b):

$$\begin{aligned}&\big|-2(2,2)+0.25(-4,12)\big|\\&=\big|(-4,-4)+(-1,3)\big|=\big|(-5,-1)\big|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}.\end{aligned}\tag{3}$$

3. (5 Punkte) Entscheiden Sie für jede der folgenden Folgen, ob sie konvergent ist oder nicht. Für jede konvergente Folge geben Sie bitte den Grenzwert an. Begründen Sie Ihre Ergebnisse durch Hinweis auf einen Satz aus der Vorlesung und durch Benutzung von Ergebnissen über reelle Zahlenfolgen aus Analysis I (hier sollen keine Ergebnisse über reelle Zahlenfolgen bewiesen werden).

   (a) $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} := \big((1+k^{-1},\sin(k^{-3}))\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

   (b) $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} := \big((e^k,-1,k^{-1}\cos(k\pi))\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

   (c) $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} := \big(((\ln(k^{-1}))^{-1},\sqrt[k]{k},(0.9)^k,\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!},\tan(e^{-k}))\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

   Nach einem Satz aus der Vorlesung ist $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x^k = (x_1^k,\dots,x_n^k)$ genau dann konvergent mit Limes $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, wenn für jedes $i\in\{1,\dots,n\}$ die Koordinatenfolge $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a_i konvergiert.

   Einige der auftretenden reellen Folgen sind konvergent auf Grund der Stetigkeit bestimmter reeller Funktionen. In der folgenden Lösung wird an den entsprechenden Stellen darauf hingewiesen, da es in der Aufgabenstellung jedoch nicht direkt verlangt war, soll es keinen Punkteabzug geben, wenn die entsprechenden Stetigkeiten nicht erwähnt werden.

   Zu (a): Da $\lim_{k\to\infty}k^{-1}=\lim_{k\to\infty}k^{-3}=0$ und $\lim_{k\to\infty}\sin(k^{-3})=0$ (wegen der Stetigkeit des Sinus), folgt aus dem oben erwähnten Satz, dass

$$\lim_{k\to\infty}\big((1+k^{-1},\sin(k^{-3}))\big)=(1,0).\tag{4}$$

   Zu (b): Da $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent ist, ist nach dem oben erwähnten Satz auch die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} := \big((e^k,-1,k^{-1}\cos(k\pi))\big)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent.

   Zu (c): Da

$$\lim_{k\to\infty}\ln(k^{-1}))^{-1}=0,\qquad \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=1,$$
$$\lim_{k\to\infty}(0.9)^k=0,\qquad \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}=e$$

   und $\lim_{k\to\infty}\tan(e^{-k})=0$ (wegen der Stetigkeit des Tangens), folgt aus dem oben erwähnten Satz, dass

$$\lim_{k\to\infty}=\left(((\ln(k^{-1}))^{-1},\sqrt[k]{k},(0.9)^k,\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!},\tan(e^{-k}))\right)=(0,1,0,e,0).\tag{5}$$

4. (5 Punkte) Geben Sie eine konvergente Teilfolge der Folge

$$\big(((-1)^k, (-1)^{k+1})\big)_{k\in\mathbb{N}} \tag{6}$$

an (zeigen Sie, dass Ihre Folge eine Teilfolge ist und dass sie konvergiert). Gibt es auch eine konvergente Umordnung? Begründung?

Die Folge

$$\big((1,-1)\big)_{k\in\mathbb{N}} \tag{7}$$

ist konvergent, da sie konstant ist. Bleibt zu zeigen, dass es sich um eine Teilfolge der Folge aus (6) handelt.

Die Folge aus (6) ist identisch mit der Funktion

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(k) = ((-1)^k, (-1)^{k+1}). \tag{8}$$

Setzt man $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\phi(k) = 2k$, so ist die Folge aus (7) identisch mit der Funktion

$$(f \circ \phi) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (f \circ \phi)(k) = ((-1)^{2k}, (-1)^{2k+1}) = (1, -1). \tag{9}$$

Da ϕ streng monoton steigend ist, ist $f \circ \phi$ eine Teilfolge von f.

Die Folge aus (6) hat keine konvergente Umordnung, denn sonst müsste sie auch selbst konvergent sein. Da aber $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent ist, ist auch die Folge aus (6) divergent.