Blatt 2 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

10. Mai 2011

Abgabe bis Freitag, den 20. Mai, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte)
   Für einen metrischen Raum (X, d) und einen Punkt $a \in X$, $r > 0$ heißt

   $$B_r(a) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

   die offene $r-$Kugel um a. Zeigen Sie, dass B eine offene Teilmenge von X ist.

2. (5 Punkte) Die p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist für $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ definiert als

   $$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   (i) Skizzieren Sie die Einheitskugel bezüglich der p-Norm im $\mathbb{R}^2$, also die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$, für $p = 1$ und $p = 2$.

   (ii) Eine weitere wichtige Norm ist die Maximumsnorm

   $$\|x\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

   Zeigen Sie, dass diese Norm mit der p-Norm in folgendem Verhältnis steht

   $$\|x\|_{\max} \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_{\max}$$

   und zeichnen Sie, wie unter (i), die Einheitskugel in der Maximumsnorm, also die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_{\max} \leq 1\}$.

3. (5 Punkte)

   Brechnen Sie folgende Grenzwerte. Sie dürfen die entsprechenden Sätze aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden.

   (i)
$$\lim_{k\to\infty}\left(\begin{pmatrix}1+\frac{(-1)^k}{k}\\ \sin(k^{-1}\pi)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-e^{\frac{1}{k}}\\ (\cos(k^{-1}\pi))^2\end{pmatrix}\right)$$

   (ii)
$$\lim_{k\to\infty}\left\{\left[\begin{pmatrix}\frac{(k+1)^2}{k^2-1}\\ \frac{1}{k}\sin(k^2)\end{pmatrix}+\pi\begin{pmatrix}\ln(1+e^{-k})\\ k^{-\frac{1}{k}}\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\sqrt[n]{\sqrt{n}}\\ \arctan(\frac{1}{k+1})\end{pmatrix}\right\}$$

   (iii)
$$\lim_{k\to\infty}\left|\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{(\pi)^{2n}}{(2n)!}\\ \sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{(\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{pmatrix}\right|$$

4. (5 Punkte)

   Sei $(X,\|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Norm $\|\cdot\|$ durch

$$d: X\times X\to\mathbb{R}_0^+,\qquad d(x,y):=\|x-y\|$$

   eine Metrik auf X erzeugt. Mit anderen Worten, zeigen Sie, dass es sich beim so definierten $d(\cdot,\cdot)$ um eine Metrik handelt.