Blatt 9 der Übungen zur Vorlesung
Analysis II für Statistiker,
LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

28. Juni 2011

Abgabe bis Freitag, den 8. Juli, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung
`http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte) Gegeben seien

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & f(x,y) &:= (x-y, xy^2), \\ g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & g(x,y) &:= (e^{x^2 y}, \sin x \cos y^2). \end{aligned}$$

   Geben Sie die Abbildung $g \circ f$ an und berechnen Sie daraus direkt $D(g \circ f)(x,y)$ (ohne Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel). Wenn das Ergebnis diverse längliche Terme enthält, ist das kein Grund zur Besorgnis.

2. (5 Punkte) Berechnen Sie die Hessematrix, also die Matrix

$$H_f(r,\phi,\theta) := \begin{pmatrix} \partial_r\partial_r f(r,\phi,\theta) & \partial_r\partial_\phi f(r,\phi,\theta) & \partial_r\partial_\theta f(r,\phi,\theta) \\ \partial_\phi\partial_r f(r,\phi,\theta) & \partial_\phi\partial_\phi f(r,\phi,\theta) & \partial_\phi\partial_\theta f(r,\phi,\theta) \\ \partial_\theta\partial_r f(r,\phi,\theta) & \partial_\theta\partial_\phi f(r,\phi,\theta) & \partial_\theta\partial_\theta f(r,\phi,\theta) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

   der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(r,\phi,\theta) = r\cos\phi\sin\theta$.

3. (5 Punkte) Veranschaulichen Sie den Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{y}{x^2+1} \tag{2}$$

   in einer geeigneten Umgebung von $(x,y) = (0,0)$, indem Sie den Graph entweder mit einem Computerprogramm plotten und ausdrucken, oder indem Sie per Hand Niveaulinien in der x-y-Ebene zeichnen, die Sie durch Auflösen der Gleichung $C = f(x,y)$ nach y für geeignete $C \in \mathbb{R}$ gewonnen haben. Tragen Sie mindestens 7 verschiedene Werte von C (auch für den Fall, dass Sie die Funktion mit dem Computer plotten) an den entsprechenden Niveaulinien in die Grafik ein.

4. (5 Punkte) Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $v : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Nehmen Sie an, dass alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und v (d. h. von den Koordinatenfunktionen v_1, v_2, v_3) auf ganz G existieren. Beweisen Sie die folgende Gleichheit von Funktionen auf G:
$$\mathrm{rot}(fv) = f\mathrm{rot}v + (\mathrm{grad}f) \times v.$$