Blatt 8 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

21. Juni 2011

Abgabe bis Freitag, den 1. Juli, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte) Die Divergenz sowie die Rotation eines Vektorfelds sind wie folgt definiert:

$$\text{für } v : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ ist } \operatorname{div} v(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

$$\text{für } v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,z,y) \\ v_z(x,z,y) \end{pmatrix}, \text{ ist } \operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) ∇f mit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz$

(b) ∇g mit $g : \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

(c) $\operatorname{div} u$ mit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $u(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x^2} z}{2} \\ -xzy\, e^{x^2} \\ z \end{pmatrix}$

(d) $\operatorname{rot} v$ mit $v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz \\ 2yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

(e) $\operatorname{div} w$ mit $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $w(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz - xy \\ xy - yz \\ yz - xz \end{pmatrix}$

2. (5 Punkte)

   Berechnen Sie die Jacobimatrix und die Jacobideterminante der bei der Definition der Kugelkoordinaten auftretenden Funktion

   $$f:\, G \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(r,\phi,\theta) := (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta),$$

   wobei $G :=]0,\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist.

3. (5 Punkte)

   Zeigen Sie, dass für alle $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, also für alle zweimal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf dem $\mathbb{R}^3$ gilt:

   $$\operatorname{rot} \nabla f = 0$$

4. (5 Punkte)

   Es sei

   $$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Berechnen Sie zunächst ∇f. Zeigen Sie nun durch Nachrechnen, dass die zweiten partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht vertauschen. Berechnen Sie hierzu also $\partial_y \partial_x f(0,0)$ und $\partial_x \partial_y f(0,0)$ und vergleichen die Ergebnisse. Was können Sie hieraus in Kombination mit Aufgabe 3 lernen?