Blatt 7 der Übungen zur Vorlesung
Analysis II für Statistiker,
LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

14. Juni 2011

Abgabe bis Freitag, den 24. Juni, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte)

   (a) Es sei $x = (1, 3, 5, 1, 1)$. Finden Sie ein $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ so, dass $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, $y_3 \neq 0$,$y_4 \neq 0$,$y_5 \neq 0$ und $y \perp x$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^5$.

   (b) Es seien $x = (2, 4, 0)$ und $y = (3, 3, 1)$. Finden Sie ein $z = (z_1, z_2, z_3)$ so, dass $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, $z_3 \neq 0$ und sowohl $z \perp x$ als auch $z \perp y$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$.

2. (5 Punkte) Finden Sie zwei Metriken auf $\mathbb{R}^n$, die nicht äquivalent sind, und begründen Sie Ihre Auswahl (wenn Sie Ihre Metriken geschickt wählen, lässt sich die Aufgabe in weniger als 5 Zeilen lösen).

3. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}\, e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   stetig auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

4. (5 Punkte) Sei wie auf Blatt 6 Aufgabe 4 $\mathcal{X}$ der reelle Vektorraum der reellen Folgen, die schließlich konstant Null sind, das heißt, eine reelle Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann ein Element von $\mathcal{X}$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n = 0$ für alle $n \geq N$. Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ können wir ein Skalarprodukt durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

definieren.

Zeigen Sie, dass die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{X}$ mit

$$x_n^k := \begin{cases} (1/2)^n & \text{für } 1 \leq n \leq k, \\ 0 & \text{für } n > k \end{cases} \tag{1}$$

bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm eine Cauchyfolge in $\mathcal{X}$ ist (geometrische Reihe!), die in $\mathcal{X}$ nicht konvergiert. Dies zeigt, dass $\mathcal{X}$ nicht vollständig (also kein Hilbertraum) ist.