Blatt 6 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

7. Juni 2011

Abgabe bis Freitag, den 17. Juni, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung
`http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

Auf Grund der Pfingstfeiertage entfallen die Tutorien am 13. und 14. Juni ersatzlos.
Dieses Blatt besteht nur aus Rechenaufgaben. Sie müssen nichts beweisen, es sollte jedoch nachvollziehbar sein, wie Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind.

1. (5 Punkte) Wie in Aufgabe 2 Blatt 2 ist die p-Norm für $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ definiert als
$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
sowie die Maximumsnorm als
$$\|x\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$
Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
   (a) $\|(2,5,7,8,3)\|_{\max}$
   (b) $\|(2,2,2,2,2,2)\|_2$
   (c) $\|(2,-2,2,-2,2,-2)\|_1$
   (d) $\|(4,9,25,16,36,100)\|_{\frac{3}{2}}$
   (e) $\|(10^{-3},1000,10^{-6})\|_{\frac{7}{3}}$
   (f) $\|(-10,4,-5,3,2,3)\|_{\max}$
   (g) $\|(\cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)\|_2$ mit $\alpha \in [0,2\pi]$, $\beta \in [0,\pi]$
   (h) $\|(3,4,2,1,7,9)\|_3$

2. (5 Punkte) Die drei Funktionen

$$f_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$f_2 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$
$$f_3 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)$$

spannen einen 3-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{V}_3$ auf. Auf diesem definieren wir ein Skalarprodukt für alle $f, g \in \mathcal{V}_3$ durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Prüfen Sie durch Nachrechnen, dass die Funktionen f_1, f_2, f_3 paarweise orthogonal zueinander (also paarweise aufeinander senkrecht stehen) und in der durch das Skalarprodukt erzeugten Norm auf Eins normiert sind, also

$$\langle f_i, f_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases}$$

3. (5 Punkte) Auf dem Vektorraum der stetigen, beschränkten Funktionen über einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ lässt sich eine p-Norm, ähnlich der auf $\mathbb{R}^n$, wie folgt definieren:

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

(i) Für $[a,b] = [0, 2\pi]$
   (a) $\|\cos(x)\|_2$
   (b) $\|\sin(x)\|_1$

(ii) und für $[a,b] = [-1,1]$
   (a) $\|\sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3-3x)\|_2$
   (b) $\|e^{-x^2}x\|_1$

4. (5 Punkte) Sei $\mathcal{X}$ der reelle Vektorraum der reellen Folgen, die schließlich konstant Null sind, das heißt, eine reelle Folge $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann ein Element von $\mathcal{X}$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n = 0$ für alle $n \geq N$. Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ können wir ein Skalarprodukt durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

definieren. Berechnen Sie nun das Skalarprodukt der folgenden Vektoren $x, y \in \mathcal{X}$.
Hinweis: Denken Sie an die geometrische Reihe bzw. fassen Sie Summanden klug zusammen um das Ergebnis direkt angeben zu können.

(a) $x_n = \begin{cases} (\frac{1}{6})^n & \text{für} \quad n \leq 99 \\ 0 & \text{für} \quad n \geq 100 \end{cases}$, $\quad y_n = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & \text{für} \quad n \leq 50 \\ 6^n & \text{für} \quad 50 < n \leq 100 \\ 0 & \text{für} \quad n > 100 \end{cases}$

(b) $x_n = \begin{cases} n & \text{für} \quad n \leq 120 \\ 0 & \text{für} \quad n > 120 \end{cases}$, $\quad y_n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \leq 100 \\ 0 & \text{für} \quad n > 100 \end{cases}$