Blatt 5 der Übungen zur Vorlesung
Analysis II für Statistiker,
LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

31. Mai 2011

Abgabe bis Freitag, den 10. Juni, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden zehn Funktionen und untersuchen Sie, welche der Funktionen konvex, streng konvex, konkav, streng konkav sind (dabei können mehrere Eingenschaften gleichzeitig zutreffen oder auch gar keine). Fertigen Sie eine Tabelle an, in der Sie für jede Funktion und für jede Eigenschaft eintragen, ob sie erfüllt ist. Hier brauchen Sie keine Beweise angeben, sodern nur die Ergebnisse eintragen.

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, && f_1(x) := x^4,\\
&f_2 :]-1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, && f_2(x) := 7,\\
&f_3 : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, && f_3(x) := \sqrt[3]{x},\\
&f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, && f_4(x) := x^3,\\
&f_5 : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, && f_5(x) := x^3,\\
&f_6 : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, && f_6(x) := \cos(x),\\
&f_7 : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}, && f_7(x) := \cos(x),\\
&f_8 : [\pi,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, && f_8(x) := \sin(x),\\
&f_9 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, && f_9(x) := \begin{cases} 5 & \text{für } x=-1,\\ -x & \text{für } -1<x<1,\\ 5 & \text{für } x=1,\end{cases}\\
&f_{10} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, && f_{10}(x) := \begin{cases} 3 & \text{für } x=0,\\ -x^3 & \text{für } x>0\end{cases}
\end{aligned}$$

2. (5 Punkte)

   Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

   in $(0,0)$ nicht stetig ist.

3. (5 Punkte)

   Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und die erste Ableitung f' von f sei beschränkt, $\sup_{x \in I} |f'(x)| < \infty$.
   Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = \sup_{x \in I} |f'(x)|$ ist.
   Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz.

4. (5 Punkte)

   Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume sowie $A : X \longrightarrow Y$ linear und stetig. Man nennt den Ausdruck

$$\|A\| := \sup \Big\{ \|A(x)\|_Y : x \in X \text{ und } \|x\|_X = 1 \Big\}, \tag{1}$$

   die Operatornorm von A. Es ist $\|A\| < \infty$, außerdem erfüllt $\|A\|$ die üblichen Eigenschaften einer Norm (kein Beweis erforderlich).
   Betrachten Sie nun die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad A(x) = Ax$$

   (a) Berechnen Sie die Operatornorm von A für den Fall, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit der 1-Norm, $\|y\|_1 = |y_1| + |y_2|$ bzw. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, versehen werden.

   (b) Berechnen Sie die Operatornorm von A für den Fall, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ beide mit der max-Norm, $\|y\|_{\max} = \max\{|y_1|, |y_2|\}$ und $\|x\|_{\max} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, versehen werden.

   Hinweis: Schätzen Sie $\|A\|$ jeweils klug nach oben und unten ab.