Blatt 4 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

24. Mai 2011

Abgabe bis Freitag, den 3. Juni, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte)

   (a) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(x)$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := -x^2 - 2$. Geben Sie explizite Formeln für $(f+g)(x)$, $(fg)(x)$, $(f/g)(x)$, $\max(f,g)(x)$, $\min(f,g)(x)$, $g^+(x)$, $g^-(x)$, $(g \circ f)(x)$ und $(f \circ g)(x)$ an.

   (b) Wie lauten die Koordinatenfunktionen von
   $$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) := (yx^3,\, \exp(-yz^2),\, |x+y+z|^3)\ ?$$

2. (5 Punkte)

   Bestimmen Sie für jede der folgenden drei Funktionen, ob sie im angegebenen Punkt ξ einen Grenzwert besitzt und beweisen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

   (a) $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \cos(1/x)$, $\xi := 0$.

   (b) $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x\cos(1/x)$, $\xi := 0$.

   (c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(r,\phi,\theta) := (r\cos\phi\sin\theta,\, r\sin\phi\sin\theta,\, r\cos\theta)$, $\xi := (0,0,0)$.

3. (5 Punkte)

   Zeigen Sie durch Benutzung von Sätzen aus der Vorlesung, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := \ln(1+\sqrt{|xy+z|})$, stetig ist (dabei dürfen Sie die Stetigkeit der eindimensionalen Funktionen $t \mapsto \ln t$, $t \mapsto \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$ und $t \mapsto |t|$ ohne Beweis benutzen).

   Aufgabe 4 auf der nächsten Seite

4. (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; f(x) = \sqrt{x}$$

gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}_0^+$ ist. Anleitung:
Zeigen Sie zunächst, dass $\sqrt{|x-y|} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^+$, und benutzen Sie diese Ungleichung dann, um zu beweisen, dass für $\epsilon > 0$ aus $|x - y| < \delta := \epsilon^2$ folgt, dass $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon$.