Blatt 3 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

17. Mai 2011

Abgabe bis Freitag, den 27. Mai, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte)
   Beweisen Sie Proposition 1.37.(a) aus dem Vorlesungsskript, also:
   Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen eindeutigen Grenzwert besitzt. Das heißt, falls für $a, b \in X$ gilt $\lim_{k\to\infty} x^k = a$ und $\lim_{k\to\infty} x^k = b$, dann folgt $a = b$.

2. (5 Punkte) In jedem der folgenden Fälle (a) – (c) ist ein metrischer Raum X und $A \subseteq X$ gegeben. Geben Sie in jedem der Fälle folgendes für die Menge A an: (i) das Innere von A, (ii) den Abschluss von A, (iii) den Rand von A, (iv) die Menge der Häufungspunkte von A, (v) die Menge der isolierten Punkte von A.

   (a) Es sei $X = \mathbb{R}$ mit der vom Absolutbetrag induzierten Metrik und
   $$A = \{-3\} \cup]-1, 1] \cup \{2 + k^{-1}, k \in \mathbb{N}\}$$

   (b) Es sei $X = \mathbb{R}^2$ mit der durch die euklidische Norm gegebenen Metrik (Blatt 2, Aufgabe 4) und
   $$A = B_3((5, 5)) \cup \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

   (c) Es sei X gleich der Menge der beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der durch die Supremumsnorm erzeugten Metrik, also $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \|f\|_{\sup} < \infty\}$ und
   $$A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f = \text{const}\}$$
   also die Menge der konstanten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

3. (5 Punkte) Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit der von der Maximumsnorm ($\|(x_1, x_2)\|_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|\}$) induzierten Metrik, sowie die Teilmengen $A :=]1, 6[\times] - 5, 1]$, $B := \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{N}\}$. Offenbar ist eine der beiden Mengen beschränkt und die andere unbeschränkt. Geben Sie für die beschränkte Menge ein $y \in \mathbb{R}^2$ und $r_0 > 0$ so an, dass die Menge in $B_{r_0}(y)$ enthalten ist. Geben Sie für die unbeschränkte Menge zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ und jedem $r > 0$ ein Element der unbeschränkten Menge an, das nicht in $B_r(x)$ liegt. Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

4. (5 Punkte) Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für} \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & \text{für} \quad x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\\ 0 & \text{für} \quad x \in [\frac{2}{n}, 2] \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktion $f_n(x)$ für ein beliebiges $n > 1$. Untersuchen Sie f_n auf gleichmäßige Konvergenz, das heißt, betrachten Sie die Supremumsnorm und untersuchen Sie, ob f_n in dieser Norm konvergiert. Geben Sie gegebenenfalls die Grenzfuktion an. Beweisen Sie in jedem Fall Ihre Antwort.