Blatt 12 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

17. Juli 2011

Achtung: Wegen der Klausur ist Blatt 12 bereits bis Mittwoch, den 27. Juli, 13 Uhr, abzugeben! Ort der Abgabe ist wie gehabt der Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.

1. (5 Punkte)

   (a) Betrachten Sie die Funktion

   $$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := xy^2 \sin z^3. \tag{1}$$

   Berechnen Sie $\nabla f(x,y,z)$, $\operatorname{div} \nabla f(x,y,z)$ und die Richtungsableitung von f im Punkt $(2,0,-2)$ in Richtung $(1,1,1)$.

   (b) Gegeben seien

   $$\begin{aligned} &f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad && f(x,y) := (\ln(xy), x \ln y), \\ &g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, && g(x,y) := (x^2+y^2, y). \end{aligned}$$

   Berechnen Sie $D(g \circ f)(x,y)$.

   (c) Berechnen Sie für die Funktion

   $$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x + xy^2, \tag{2}$$

   die Terme der Taylorformel für $m = 1$ an der Stelle $\xi = (0,0)$ mit dem Restglied von Lagrange $R_1(\xi)$ ($m = 1$ heißt, dass in $R_1(\xi)$ partielle Ableitungen 2. Ordnung auftreten).

2. (5 Punkte) Betrachten Sie folgende Funktionen:

   (a)

   $$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{|x|+|y|} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{3}$$

   (b)

   $$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x,y) := \begin{cases} xy\frac{(|x|-|y|)^2}{|x|+|y|} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{4}$$

(c)

$$h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x,y) := \frac{x}{y}. \tag{5}$$

(d)

$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u(x,y) := x \arctan(1/y). \tag{6}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht stetig ist, dass g auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist, dass h für $(x,y) \to (0,0)$ keinen Grenzwert besitzt und dass

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0. \tag{7}$$

3. (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden drei Aussagen:

   (a) Die Menge $A := \{(1-n^{-1}, 1-n^{-1}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,1)\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

   (b) Die Menge $A := \{k^3 : k \in \mathbb{N}\}$ ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

   (c) Die Menge $A := \{(x, \ln x) : x \in [1, \infty[\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

4. (5 Punkte) Geben Sie **ohne Beweis** bei jeder der folgenden Aussagen an, ob die Aussage wahr oder falsch ist:

   (i) Je zwei Metriken d_1 und d_2 auf $\mathbb{R}^2$ sind äquivalent.

   (ii) Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf $X := C[0,1]$, also auf dem Raum aller reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Wenn die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind, so sind auch die von ihnen erzeugten Metriken äquivalent.

   (iii) Es gilt

   $$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{x,y\in\mathbb{R}^n}{\forall} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}. \tag{8}$$

   (iv) Jede auf einem normierten Vektorraum definierte lineare Abbildung ist stetig.

   (v) Jede auf einer offenen Teilmenge G des $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, definierte Abbildung $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die differenzierbar ist, ist auch stetig.

   (vi) Ist $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen bezüglich der euklidischen Norm, so hat O keine isolierten Punkte.

   (vii) Der Durschschnitt aller im $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Norm offenen Kugeln um 0 ist eine offene Menge.

   (viii) Ist A eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes, so gilt $\partial A \subseteq A$.

   (ix) Ist A eine Teilmenge eines metrischen Raumes X, und $x \in X$ ein Häufungspunkt von A, so ist $x \in A$.

   (x) Die Einschränkung einer streng konvexen Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist streng konvex.