Blatt 11 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

12. Juli 2011

Abgabe bis Freitag, den 22. Juli, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte) Berechnen Sie die in der Vorlesung definierte Richtungsableitung für die Funktion $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3$ im Punkt $(1,3,1)$ in die Richtung $v = (1,1,1)$.

2. (5 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen (a) – (e):

   (a) $A := [0,1]$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

   (b) $A := [0,1[$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

   (c) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist $\{x\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

   (d) $A := \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

   (e) Ist $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so ist für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\epsilon > 0$, die abgeschlossene Kugel $\overline{B}_\epsilon(x)$ um x mit Radius ϵ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

3. (5 Punkte) Betrachten Sie die folgenden Funktionen und untersuchen Sie, welche der Funktionen lokale/globale/strenge Minima/Maxima besitzen (dabei kann mehreres gleichzeitig zutreffen oder auch gar nichts). Vervollständigen Sie dazu die folgende Tabelle, indem Sie in jedem Kästchen entweder einen passenden Punkt aus dem Definitionsbereich der entsprechenden Funktion angeben, oder durch "–" kenntlich machen, dass kein solcher existiert. Sie brauchen für Ihre Einträge keine Beweise angeben.

$$
\begin{aligned}
&f_0 :]-1,1] \times [-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}, && f_0(x,y) := -x+y,\\
&f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, && f_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2,\\
&f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, && f_2(x,y,z) := e^{x^2+y^2+z^2},\\
&f_3 : [-1,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, && f_3(x,y) := e^{x+y},\\
&f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, && f_4(x) := \|x\|_{\max},\\
&f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, && f_5(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x,y=0,\\ x^2+y^2 & \text{für} \quad 0 < x^2+y^2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

	globales Min.	strenges globales Min.	lokales Min.	strenges lokales Min.	globales Max.	strenges globales Max.	lokales Max.	strenges lokales Max.
f_0	(1,-1)	(1,-1)	...					
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								

4. (5 Punkte) Es sei $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = \ln x$. Geben Sie das Taylorpolynom 5.-Ordnung von f, also $T_5(x,a)$ bei Entwicklung um $a = 1$ an. Bestimmen Sie die Lagrangesche Form des Restglieds $R_5(x,1)$ (Gleichung (3.6) im Skript).