Blatt 10 der Übungen zur Vorlesung *Analysis II für Statistiker*, LMU-München, Sommersemester 2011

Florian Hoffmann, Peter Philip

5. Juli 2011

Abgabe bis Freitag, den 15. Juli, 13 Uhr, im Kasten zur Vorlesung neben der Bibliothek.

Bonussystem: Bei erfolgreicher Teilnahme an den Übungen erhalten Sie in der Abschlussklausur Bonuspunkte. Die Einzelheiten sind auf der Webseite zur Vorlesung `http://www.math.lmu.de/~fhoff/2011analysisII.php` beschrieben.
Hinweis: Es erfolgt eine Punkteteilung bei gemeinsamer Abgabe, das heißt, die Punkte einer Aufgabe werden zwischen allen, die identische oder abgeschriebene Lösungen für die Aufgabe abgeben, geteilt.

1. (5 Punkte) Gegeben seien wie auf dem letzten Blatt

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) := (x-y, xy^2), \\ g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad g(x,y) := (e^{x^2 y}, \sin x \cos y^2). \end{aligned}$$

   Geben Sie die Abbildung $g \circ f$ an und berechnen Sie daraus unter expliziter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel (Theorem 2.28) $D(g \circ f)(x,y)$.

2. (5 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $n \in \mathbb{N}$ und $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf G. Es gebe ein $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $\xi \in G$ gilt $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)| \leq M$. Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig auf G ist.

3. (5 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \sin(x^2 + \sin x \cos^2 x)$ unter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel. Hierzu zerlegen Sie F als $F(x) = (f \circ g)(x)$ mit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \sin(x + yz)$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \sin x \\ \cos^2 x \end{pmatrix}$.

4. (5 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Berechnen Sie die lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Punkten $x = 0$, $x = 1$ sowie $x = -1$ und skizzieren Sie jeweils den Graphen von $Df(x)$.