MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H.-D. Donder

WS 09/10
Blatt 9
21.12.09

1. Probeklausur zu Analysis I (für Mathematiker)

1. (a) Man zeige
$$\frac{n^2}{2^n} < \frac{1}{n} \qquad \text{für } n \geq 10$$
(b) Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, definiert durch
$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Man zeige
$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$
(4 Punkte)

2. (a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, \quad n \geq 0.$$
Man beweise, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bestimme den Grenzwert.
(b) Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$
eine Nullfolge ist.
(Sie können $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \exp(1)$ verwenden.)
(4 Punkte)

3. Man untersuche die Konvergenz der Reihen
$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^n}}, \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$
(4 Punkte)

4. Man zeige, dass die Gleichung
$$e^x = 2 + x$$
in $\mathbb{R}^+$ genau eine Lösung besitzt. (4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, den 11. Januar 2010, 14.30 Uhr
(Gekennzeichneter Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek).