

Übungen zu Analysis I (für Mathematiker)

1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion mit

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0,$$

wobei n ungerade.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \infty$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f(-k) = -\infty$.

(b) Seien $c < d$ mit $f(c) > 0$ und $f(d) < 0$.

Zeigen Sie, dass f mindestens drei verschiedene Nullstellen hat.

(4 Punkte)

2. Sei $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$.

Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass ein $c \in [0, 1]$ existiert mit $f(c+1) = f(c)$.

(4 Punkte)

3. Sei

$$A = \left\{ m + \frac{1}{n+1} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte von A .

(4 Punkte)

4. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und sei A' die Menge aller Häufungspunkte von A . Setze $B := A \cup A'$.

Zeigen Sie, dass B abgeschlossen ist.

(4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, den 14. Dezember 2009, 14.30 Uhr
(Gekennzeichneter Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek).