MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H.-D. Donder

WS 09/10
Blatt 6
30.11.09

Übungen zu Analysis I (für Mathematiker)

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produkts die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$(a) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^k} \qquad\qquad (b) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$$

(4 Punkte)

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_1 = 1$ und $|a_n| \leq 1$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie
   (a) Die Reihe
   $$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$
   konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.
   (b) Es gilt $f(x) \neq 0$ für $0 < |x| < \frac{1}{2}$.

(4 Punkte)

3. Eine Teilmenge D von $\mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $a, b \in D$ mit $a < b$ gilt, dass $[a, b] \subseteq D$.
   Offensichtlich ist jedes Intervall konvex. Man zeige umgekehrt, dass jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Intervall ist.

(4 Punkte)

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
   $$f(x) = x - [x] \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$
   Bestimmen Sie alle Punkte $a \in \mathbb{R}$, in denen f stetig ist. (4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, den 7. Dezember 2009, 14.30 Uhr
(Gekennzeichneter Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek).