

Übungen zu Analysis I (für Mathematiker)

1. (a) Sei $0 \leq x \leq 1$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}$$

- (b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$$

(4 Punkte)

2. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Weiterhin sei $c \in \mathbb{R}$.
Setze $A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$ und $cA := \{ca \mid a \in A\}$.

- (a) Sei $c \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\sup(cA) = c \sup(A)$$

- (b) Zeigen Sie:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

(4 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

(4 Punkte)

4. Seien $a, b \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a - b|}$$

(4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, den 9. November 2009, 14.30 Uhr
(Gekennzeichnete Übungskasten im 1. Stock vor der Bibliothek).