LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Sommersemester 2010

H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis II Tutorium

Blatt 11

Aufgabe 11.1.

Sei $\tan\colon(-\pi,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$ die übliche Tangens Funktion.

Sei $f\colon\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\neq 0\neq y\}\longrightarrow\mathbb{R}$ die Funktion $f(x_1,x_2):=\arctan\frac{x_2}{x_1}+\arctan\frac{x_1}{x_2}$.

Ausserdem, seien

$A_1:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1>0,x_2>0\}$,

$A_2:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1<0,x_2>0\}$,

$A_3:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1<0,x_2<0\}$,

$A_4:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|x_1>0,x_2<0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jede $t\in\mathbb{R}$, $\cos^2(\arctan t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

(b) Zeigen Sie, dass $(\frac{d}{dt}\arctan)(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

(c) Zeigen Sie, dass f nicht konstant ist.

(d) Sei $i\in\{1,2,3,4\}$. Zeigen Sie, dass f konstant in A_i ist.

(e) Berechnen Sie die Werte von f in A_1, A_2, A_3 und A_4.

Aufgabe 11.2. Seien $X\neq\emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum, $f\colon X\longrightarrow X$ eine Funktion und $N\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Nehmen wir an, dass die Komposition $f^N:=\underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{N\text{-mal}}$ eine Kontraktion ist.

Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 11.3. Sei $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ die Funktion $f(x_1,x_2)=(x_1^2,x_1+x_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass f nicht injectiv ist.

(b) Geben Sie eine offene Menge $U\subset\mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften:

b1. f ist stetig differenzierbar in U;

b2. $Df(z)$ ist invertierbar für jede $z\in U$;

b3. f besitzt keine Umkehrfunktion in U.

Aufgabe 11.4. Sei $f\colon\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ die Funktion $f(x_1,x_2):=\Big(\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2},\dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\Big)$.

(a). Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

(b). Zeigen Sie, dass für jede $x\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $Df(x)$ nicht invertierbar ist.

(c). Zeigen Sie, dass es unendlich viele Punkte $w\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,\,0)\}$ gibt so dass es keine offene Umgebung U um w gibt mit $f|_U$ invertierbar.