LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. H.-D. Donder
Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Sommersemester 2010
25. Juni 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 10

Aufgabe 10.1. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der folgenden Funktionen mit Entwicklungspunkt $(0,0)$:
(a) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2}$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$

Aufgabe 10.2. Bestimmen Sie alle Minima und Maxima der folgenden Funktionen:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \cos(x_1) + \cos(x_2)$
(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 + x_2^2$

Aufgabe 10.3. Finden Sie jeweils eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass:
(a) $\mathrm{Hess} f(0)$ nicht positiv definit ist, aber f in 0 ein striktes Minimum hat.
(b) $\mathrm{Hess} f(0)$ nicht indefinit ist, aber f in 0 kein Extremum hat.

Aufgabe 10.4. Sei C die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, deren m-te partielle Ableitungen für alle $m \leq k$ beschränkt sind. Sei nun

$$\|f\|_k = \sum_{\substack{m \leq k \\ 1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n}} \|D_{i_1} \ldots D_{i_m} f\|,$$

wobei $\|\|$ die Supremums-Norm ist. Zeigen Sie, dass C mit $\|\|_k$ ein vollständiger normierter Vektorraum ist.