Mathematisches Institut der LMU München

Sommersemester 2010

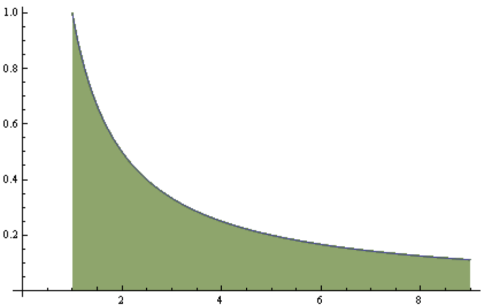
H. Donder, A. Fackler, P. Garcia

Analysis II Tutorium

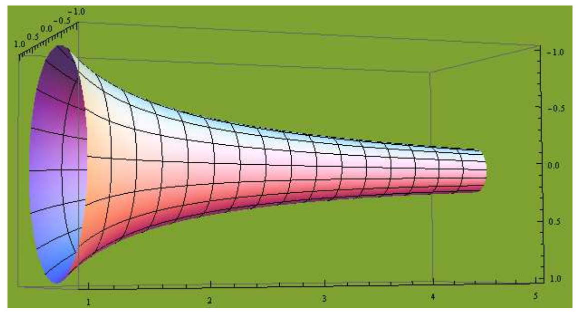
Blatt 1

Aufgabe 1.0. (Gabriels Horn).

a) Zeigen Sie dass die Fläche unter der Kurve $\{(x,\, \frac{1}{x}) | x \in [1,\, \infty]\}$ (siehe Figur) undendlich ist.



b) Wenn mann die Kurve $\{(x,\, \frac{1}{x}) | x \in [1,\, \infty]\}$ um die x Achse rotiert bekommt man "Gabriels Horn" (siehe Figur). Zeigen Sie dass das Volumen des von Gabriel Horns Umfassendes Bereiches endlich ist (gleich π).



Aufgabe 1.2. Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ und $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so dass $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, b]$ und $\int_a^b f(x)dx = 0$. Zeigen Sie dass $f(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$.

Aufgabe 1.3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\, dx$

b) $\int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$

c) $\int_0^{2\pi} \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x)\, dx$

d) $\int_0^1 \dfrac{x}{(1+ax^2)^k} dx$, für $a > 0, k \in \mathbb{N}, k > 1$ (Substitutionregel)

e) $\int_0^{\pi} \sin(x) \cos^3(x) dx$ (Substitutionregel)

f) $\int_0^1 x^2 e^x dx$ (Partielle Integration)

Aufgabe 1.4. Zeigen Sie dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitung.

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \int_0^{\sin(x)} \exp(-y^2)\, dy$

b) $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ G(x) := \int_0^x \left(\int_1^{y^2} \frac{dt}{1+\sin^2(t)} \right) dy$

c) $G\colon (\frac{\pi}{2}, \pi), \to \mathbb{R},\ G(x) := \displaystyle\int_1^{\int_{\pi/2}^x \frac{\sin(u)}{u} du} \frac{1}{t^2 + \sin^4(t)} dt$