Andreas Fackler

11. Juni 2010

Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A \cap B$. Dann liegt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere in der kompakten Menge A, hat also einen Häufungspunkt in A. Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen ein $a \in A$ konvergiert. Da $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auch in der kompakten Menge B liegt, hat diese Teilfolge einen Häufungspunkt in B. Da sie konvergent ist, ist ihr Grenzwert a aber ihr einziger Häufungspunkt, also ist $a \in B$. Damit haben wir gezeigt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt in $A \cap B$ hat, dass $A \cap B$ also kompakt ist.

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A \cup B$. Dann liegt jedes Folgenglied x_n in mindestens einer der Mengen A und B. Also liegen in mindestens einer der beiden Mengen unendlich viele Folgenglieder, das heißt, es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die vollständig in A oder vollständig in B liegt. Diese hat dann, da A bzw. B kompakt ist, einen Häufungspunkt in A bzw. B. Da dieser Häufungspunkt insbesondere in $A \cup B$ liegt, ist damit bereits die Kompaktheit von $A \cup B$ gezeigt.

Aufgabe 2: Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Da X kompakt ist, hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $a \in X$. Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich gegen a konvergiert.

Sei hierzu $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m$ gilt: $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. Da a ein Häufungspunkt ist, gibt es ein $k \geq m$, so dass $d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Insgesamt gilt dann für alle $n \geq m$:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_k) + d(x_k, a) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Aufgabe 3: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A \cdot B$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $y_n \in A$ und $z_n \in B$, so dass $x_n = y_n \cdot z_n$. Da A kompakt ist, hat $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $a \in A$. Sei $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Teilfolge. Da B kompakt ist, hat $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $b \in B$, also eine gegen b konvergente Teilfolge $(z_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$. Dann gilt aber:

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} \cdot z_{n_{k_l}} = \lim_{l\to\infty} y_{n_{k_l}} \cdot \lim_{l\to\infty} z_{n_{k_l}} = a \cdot b \in A \cdot B$$

Aufgabe 4: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x$, die jeden Punkt auf die x-Achse projiziert, ist stetig, denn ist $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen (a, b) konvergente Folge, so konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a = f(a, b)$. Bilder zusammenhängender Mengen unter stetigen Funktionen sind aber wieder zusammenhängend, also ist $B = f[A]$ zusammenhängend. Da die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind, muss B ein Intervall sein.