Mathematisches Institut
der Universität München

Wintersemester 2008/2009

Mathematik I für Physiker

Musterlösung der Probeklausur

Aufgabe 1:

(a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\exp(x^x \ln(x)))' = \exp(x^x \ln(x)) \cdot (x^x \ln(x))' = x^{x^x} \left((x^x)' \ln(x) + x^x \ln'(x)\right) \\
&= x^{x^x} \left((\exp(x \ln(x)))' \ln(x) + x^x \frac{1}{x}\right) = x^{x^x} \left(\exp(x \ln(x))(x \ln(x))' \ln(x) + x^x \frac{1}{x}\right) \\
&= x^{x^x} \left(x^x \left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) \ln(x) + x^x \frac{1}{x}\right) = x^{x^x + x} \left((\ln(x) + 1) \ln(x) + \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{\cos(\ln(x))}{x}\right)' = \frac{(\cos(\ln(x)))' x - \cos(\ln(x))}{x^2} \\
&= \frac{-\sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \cos(\ln(x))}{x^2} = -\frac{\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x))}{x^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

(a) *Induktionsanfang für $n = 0$:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{k}{2^k} = \frac{0}{2^0} = 0 = 2 - \frac{0+2}{2^0}$

Induktionsschritt: Sei $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ bereits gezeigt. Dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

(b) *Induktionsanfang für $n = 0$:* $\displaystyle\sum_{k=m}^{m+0} k = m = \frac{(0+1)(0+2m)}{2}$

Induktionsschritt: Sei $\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n} k = \frac{(n+1)(n+2m)}{2}$ bereits gezeigt. Dann:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{m+(n+1)} k &= \sum_{k=m}^{m+n} k + m + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2m)}{2} + m + n + 1 \\
&= \frac{(n+1)(n+2m) + 2m + 2n + 2}{2} = \frac{(n+2)(n+2m) + n + 2}{2} \\
&= \frac{((n+1)+1)((n+1)+2m)}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(a) Sei $a_n = \sin\left(\frac{n}{1000}\pi\right)$. Würde (a_n) konvergieren, so würden auch alle Teilfolgen gegen denselben Grenzwert konvergieren. Es ist aber für alle $m \in \mathbb{N}$

$$a_{2000m} = \sin(2\pi m) = 0 \quad \text{und} \quad a_{2000m+500} = \sin\left(2\pi m + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

also konvergiert die Teilfolge (a_{2000m}) gegen 0, aber $(a_{2000m+500})$ gegen 1. Daher divergiert die Folge.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\sin\left(\frac{1+2n^2}{n}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\pi + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Da der Sinus stetig ist, gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1+2n^2}{n}\pi\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = \sin(0) = 0$$

Aufgabe 4:

(a) Da die Folge bei $k = 0$ beginnt und $\frac{1}{0}$ nicht definiert ist, ist die ganze Summe undefiniert. Wenn man diesen Tippfehler in der Angabe übergeht:

$\cos(k\pi)$ is 1 für gerade k und -1 für ungerade k, also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$$

Dies konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, das $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge ist.

(b) Wäre diese Reihe konvergent, so wäre wegen

$$\frac{1+k+k^2}{k^3} > \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}$$

nach dem Majorantenkriterium auch die Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

konvergent. Dies ist aber nicht der Fall.

Aufgabe 5: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, konvergieren alle Teilfolgen gegen denselben Grenzwert, also insbesondere auch $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass diese beiden Teilfolgen gegen a konvergieren, und zeigen wir, dass dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = a$ ein m_0, so dass für alle $k \geq m_0$ gilt: $|a - a_{2k}| < \epsilon$. Und es gibt wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k+1} = a$ ein m_1, so dass für alle $k \geq m_1$ gilt: $|a - a_{2k+1}| < \epsilon$. Setze $m = \max\{2m_0, 2m_1 + 1\}$. Sei $n \geq m$ gegeben. Wir müssen nun zeigen, dass dann $|a_n - a| < \epsilon$ gilt.
Entweder n ist gerade. Dann ist $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und wegen $n \geq m \geq 2m_0$ ist dann $k \geq m_0$. Also gilt:

$$|a_n - a| = |a_{2k} - a| < \epsilon$$

Oder n ist ungerade. Dann ist $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und wegen $n \geq m \geq 2m_1 + 1$ ist dann $k \geq m_1$. Also ist:

$$|a_n - a| = |a_{2k+1} - a| < \epsilon$$

Aufgabe 6: Wir zeigen, dass f gleichmäßig stetig ist. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Seien nun $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben mit $|x-y| < \delta$. Wir müssen zeigen, dass dann $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ ist. Sei hierzu $m = \max\{|x|, |y|\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq \left|\frac{y^2 - x^2}{1+m^2}\right| = |y-x|\frac{|y+x|}{1+m^2} \\ &\leq |y-x|\frac{m+m}{1+m^2} = |y-x|\frac{2}{\frac{1}{m}+m} \leq 2|y-x| < 2\delta = \epsilon, \end{aligned}$$

(Das letzte $\leq$ gilt, da entweder $m \geq 1$ oder $\frac{1}{m} \geq 1$, also der Nenner auf jeden Fall mindestens 1 ist.)