Mathematisches Institut
der Universität München

Wintersemester 2008/2009

Mathematik I für Physiker

Probeklausur

Prof. Dr. H.-D. Donder

Aufgabe 1: Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{(a)} \qquad f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, \quad f(x) = x^{(x^x)}$$

$$\text{(b)} \qquad g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

Aufgabe 2: Beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ (und $m \in \mathbb{N}$):

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=m}^{m+n} k = \frac{(n+1)(n+2m)}{2}$$

Aufgabe 3: Beweise oder widerlege, dass folgende Folgen konvergieren:

$$\text{(a)} \quad \left(\sin\left(\frac{n}{1000}\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \left(\sin\left(\frac{1+2n^2}{n}\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Aufgabe 4: Beweise oder widerlege, dass folgende Reihen konvergieren:

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{k} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k+k^2}{k^3}$$

Aufgabe 5: Zeige: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn sowohl die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, als auch die Teilfolge $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Aufgabe 6: Beweise oder widerlege: Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

is gleichmäßig stetig.