Mathematisches Institut
der Universität München

Wintersemester 2008/2009

Mathematik I für Physiker

Musterlösung der Probeklausur 2

Aufgabe 1:

(a) Wir stellen zunächst i in Polarkoordinaten dar: Wegen $|i| = 1$ müssen wir nur ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ finden, so dass $i = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, so dass also $\cos(\varphi) = 0$ und $\sin(\varphi) = 1$ ist. Die einzigen Nullstellen des Cosinus im Intervall $[0, 2\pi)$ sind $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$. Wegen $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$ ist also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und somit $i = e^{i\pi/2}$.

Damit erhalten wir $(\sqrt{3} + i)^3 = \sqrt{3^3} + 3\sqrt{3^2}i + 3\sqrt{3}i^2 + i^3 = 9i - i = 8i = 8e^{i\pi/2}$ und $2i = 2e^{i\pi/2}$ und somit:

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^3}{2i} = \frac{8e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/2}} = 4 = 4e^{i\cdot 0}$$

(b) Wegen $(\sqrt{3} + i)^3 = 8e^{i\pi/2}$ muss $\sqrt{3} + i = 2e^{i\psi}$ sein, so dass $(e^{i\psi})^3 = e^{3i\psi} = e^{i\pi/2}$ ist, so dass also $3\psi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist. Damit kommen für ψ die Werte $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi$ und $\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi$ in Frage. Da Real- und Imaginärteil positiv sind, muss $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$ liegen, also bleibt nur $\psi = \frac{\pi}{6}$. Es folgt:

$$2i(\sqrt{3} + i) = 2e^{i\pi/2} \cdot 2e^{i\pi/6} = 4e^{i\frac{4}{6}\pi} = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

Aufgabe 2:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist nach der binomischen Formel

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = (1 + x)^{2n} = ((1 + x)^n)^2 = \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m\right)^2.$$

Auf beiden Seiten steht ein Polynom in x. Der Koeffizient von x^n ist auf der linken Seite $\binom{2n}{n}$ und auf der rechten Seite, wenn man ausmultipliziert:

$$\sum_{m_1 + m_2 = n} \binom{n}{m_1}\binom{n}{m_2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Leiten wir also die linke Seite n-mal ab und setzen $x = 0$ ein, erhalten wir $n! \cdot \binom{2n}{n}$. Auf der rechten Seite erhalten wir $n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Folglich gilt:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

(b) *Induktionsanfang für $n=0$:* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k = 0 = x\frac{1-x^0}{(1-x)^2} - \frac{0x^1}{1-x}$

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=0}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = x\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x} + (n+1)x^{n+1} \\
&= x\frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x} + \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x} - \frac{(n+1)x^{n+2}}{1-x} \\
&= \frac{x-x^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{x^{n+1}}{1-x} - \frac{(n+1)x^{n+2}}{1-x} = \frac{x-x^{n+2}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+2}}{1-x} \\
&= x\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+2}}{1-x}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(a)

$$\begin{aligned}
(n+1)\cos\left(\frac{6+9n+4n^2}{2n+2}\pi\right) &= (n+1)\cos\left(\frac{6+5n}{2n+2}\pi + 2n\pi\right) \\
&= (n+1)\cos\left(\frac{1}{2n+2}\pi + \frac{5}{2}\pi + 2n\pi\right) \\
&= (n+1)\cos\left(\frac{\pi}{2n+2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n+2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2n+2}}
\end{aligned}$$

Dies konvergiert für $n\to\infty$ gegen $\dfrac{\pi}{2}\cos'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

(b) Da der Sinus stetig ist, ist $\lim_{k\to\infty}\sin\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{5}\right) = \sin\left(\frac{1}{5}\right) \neq 0$, also ist die Folge der Summanden keine Nullfolge. Daher divergiert die Reihe.

Aufgabe 4:

(a) Wir benötigen die ersten drei Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2e^{x^3} \\
f''(x) &= 6xe^{x^3} + 9x^4e^{x^3} = (6x+9x^4)e^{x^3} \\
f'''(x) &= (6+36x^3)e^{x^3} + (6x+9x^4)\cdot 3x^2e^{x^3} = (6+54x^3+27x^6)e^{x^3}
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom ist also:

$$T_3(f,0)(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x^3$$

(b) Da f eine gerade Funktion ist, sind ungeradzahlige Ableitungen ungerade, verschwinden also im Nullpunkt. Es ist also $f'''(0) = 0$ und wir müssen nur noch die ersten beiden Ableitungen berechnen:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(x) = -\frac{2(1+x^2) - 4x \cdot 2x}{(1+x^2)^3}$$

Das Taylorpolynom ist also:

$$T_3(f,0)(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - x^2$$

Aufgabe 5:

(a) Es ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$ und $0 = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1$, also $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (denn zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist der Cosinus positiv), also:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \tan t \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/4} \left(-\frac{1}{\cos t}\right)(-\sin t)\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= [\ln x]_{1/\sqrt{2}}^1 = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

(b) Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}
\int_0^a t^3 e^{-t}\mathrm{d}t &= \int_0^a (-t^3)(-e^{-t})\mathrm{d}t = \left[-t^3e^{-t}\right]_0^a - \int_0^a (-3t^2)e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= -a^3e^{-a} - \int_0^a 3t^2(-e^{-t})\mathrm{d}t = -a^3e^{-a} - \left[3t^2e^{-t}\right]_0^a + \int_0^a 6te^{-t}\mathrm{d}t \\
&= -a^3e^{-a} - 3a^2e^{-a} + \int_0^a (-6t)(-e^{-t})\mathrm{d}t \\
&= -a^3e^{-a} - 3a^2e^{-a} + \left[-6te^{-t}\right]_0^a - \int_0^a (-6)e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= -a^3e^{-a} - 3a^2e^{-a} - 6ae^{-a} - \left[6e^{-t}\right]_0^a = -a^3e^{-a} - 3a^2e^{-a} - 6e^{-a} + 6
\end{aligned}$$

Dies konvergiert für $a \to \infty$ gegen 6, also ist der Wert des uneigentlichen Integrals 6.

Aufgabe 6:

Wir zeigen, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ der links- und rechtsseitige Grenzwert existieren. Da die beiden Fälle völlig analog sind, betrachten wir nur den linksseitigen.

Weil g eine Regelfunktion ist, existiert $l = \lim_{x\nearrow a} g(x)$. Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(-\infty, a)$, die gegen a konvergiert, gilt also $l = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$. Wegen der Stetigkeit von f folgt daraus $f(l) = \lim_{n\to\infty} f(g(x_n))$.

Wir haben also gezeigt, dass für jede von unten gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $(f \circ g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(l)$ konvergiert. Also gilt auch $\lim_{x\nearrow a} f \circ g(x) = f(l)$. Insbesondere existiert der linksseitige Grenzwert bei a.