

Mathematik I für Physiker

Übungsblatt 6

Prof. Dr. H.-D. Donder

Aufgabe 1: Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeige mit dem Zwischenwertsatz, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ einen Fixpunkt, d.h. ein $x \in [a, b]$ mit $x = f(x)$, hat.

Aufgabe 2: Bestimme mit Hilfe des Cauchy-Produkts die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$(a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^k} \qquad (b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$$

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^3$. Zeige mit dem Zwischenwertsatz, dass f bijektiv ist, dass also für jedes $y \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $y = f(x)$.

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & , \text{ falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- (a) Zeige, dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{Q}$ unstetig ist.
- (b) Zeige, dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.