Mathematisches Institut
der Universität München Wintersemester 2008/2009

Mathematik I für Physiker

Übungsblatt 10

Prof. Dr. H.-D. Donder

Aufgabe 1: Der *Tangens* $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + z\pi \mid z \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Berechne die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

(c) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$ (d) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$

Aufgabe 2: Zeige, dass die Einschränkungen

$$\begin{array}{rll} \underline{\sin} : & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1], & \underline{\sin}(x) = \sin(x) \\ \underline{\cos} : & [0,\pi] \to [-1,1], & \underline{\cos}(x) = \cos(x) \\ \underline{\tan} : & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, & \underline{\tan}(x) = \tan(x) \end{array}$$

der Winkelfunktionen bijektiv sind und berechne die Ableitungen ihrer Umkehrfunktionen $\arcsin = \underline{\sin}^{-1}$, $\arccos = \underline{\cos}^{-1}$ und $\arctan = \underline{\tan}^{-1}$.

Aufgabe 3: Zeige, dass der Sinus Hyperbolicus $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist und dass seine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden kann durch:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Aufgabe 4: Die Funktion $\operatorname{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ für } x \neq 0 \text{ und } \operatorname{sinc}(0) = 1.$$

Zeige, dass sinc differenzierbar ist und berechne die Ableitung sinc'.