Analysis II

Prof. R. Lasser

(SS 2001)

Inhaltsverzeichnis

10 Integration

Wir führen nun auf schnellstem Wege ein Integral ein. Man sollte beachten, daß es selbst für einfachste Definitionsbereiche verschiedene Arten von Integralen gibt (z.B. Cauchy-Integral, Riemann-Integral, Lebesgue-Integral u.s.w.).

Die Grundidee der Integration ist es, den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen Graph und x-Achse innerhalb der Intervallgrenzen liegt, zu berechnen. Für Treppenfunktionen ist dies klar. Mittels eines Grenzübergangs erweitern wir das Integral auf allgemeinere Funktionen. Die Vorstellung gilt für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen. Wir werden dennoch auch $\mathbb{C}$-wertige Funktionen zulassen.

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es $a_0, ..., a_n \in [a, b]$ gibt mit $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$, so daß $f|\ ]a_{k-1}, a_k[\ = c_k \in \mathbb{K}$ gilt für $k = 1, ..., n$. Für die Werte $f(a_0), f(a_1), ..., f(a_n)$ wird nichts weiter vorausgesetzt.

$a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n = b$ heißt Teilung (Partition) von $[a, b]$. In diesem Fall sprechen wir von einer Teilung von $[a, b]$ zu f, weil an jeder Sprungstelle von f ein Teilungspunkt liegt. Man beachte aber, daß nicht jeder Teilungspunkt eine Sprungstelle von f ist (z.B. der Punkt a_4). Ist $a_{j-1} < a' < a_j$ für ein $j = 1, ..., n$, so heißt die Teilung $a = a_0 < a_1 < ... < a_{j-1} < a' < a_j < ... < a_n = b$ feiner als $a = a_0 < ... < a_n = b$.

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion mit einer Teilung $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ zu f und $f|\ ]a_{k-1}, a_k[\ = c_k$, $k = 1, ..., n$, so setzen wir

$$\int_a^b f(x)\ dx := \sum_{k=1}^{n} c_k\ (a_k - a_{k-1})\ \in \mathbb{K} \tag{10.1}$$

$\int_a^b f(x)\ dx$ heißt das **Integral von f**. Man hat nun selbstverständlich zu prüfen, daß $\int_a^b f(x)\ dx$ unabhängig von der Wahl der Teilung von f ist. Für die Teilungen von f, die durch Hinzufügen oder Fortnehmen von passenden Punkten auseinander hervorgehen, reicht es zu begründen, daß das Hinzufügen eines Punktes a', $a_{j-1} < a' < a_j$, das Integral von f nicht ändert:

$$\sum_{k=1}^{j-1} c_k\ (a_k - a_{k-1})\ + c_j\ (a' - a_{j-1})\ + c_j\ (a_j - a')\ + \sum_{k=j+1}^{n} c_k\ (a_k - a_{k-1})\ = \sum_{k=1}^{n} c_k\ (a_k - a_{k-1}),$$

da die Summe der beiden mittleren Terme gleich $c_j\ (a_j - a_{j-1})$ ist.

Mit Blick auf Anwendungen in der Statistik definieren wir später das sog. Riemann-Stieltjes-Integral und als Spezialfall davon das Riemann-Integral. Dabei ist eine beliebige monoton wachsende Funktion $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ vorgegeben und man betrachtet Summen $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \ (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ und dann das Supremum und Infimum derartiger Summen. Jetzt sei schon erwähnt, daß dann Sprungstellen in f den Wert des Integrals beeinflussen können (wenn α auch springt), während jetzt $f(a_0), f(a_1), ..., f(a_n)$ ohne Bedeutung für $\int_a^b f(x)\ dx$ sind.

Mit $T([a,b])$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen. Sind $f, g \in T([a,b])$, so ist auch $f+g \in T([a,b])$. Durch Verfeinerung einer Teilung von f und einer Teilung von g erhält man eine Teilung von f und von g, und somit ist $f+g$ eine Treppenfunktion. Offensichtlich ist auch $\lambda f \in T([a,b])$, falls $f \in T([a,b])$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Damit ist also $T([a,b])$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $T([a,b])$ ist ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum vom $\mathbb{K}$-Vektorraum $B([a,b])$, (vgl. Beispiel vor Satz 7.5), dem Raum der beschränkten Funktionen auf $[a,b]$. Ist nämlich $f \in T([a,b])$, so gilt

$$\| f \|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)| \ = \max_{k=1,\ldots,n} |c_k|,$$

wobei $f|\ ]a_{k-1}, a_k[= c_k$ auf den jeweiligen "Treppenstufen" ist.

Wir halten einige Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen fest:

(a) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx \ = \int_a^b f(x)\ dx \ + \int_a^b g(x)\ dx$ für $f, g \in T([a,b])$

(b) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\ dx \ = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$ für $f \in T([a,b])$

(c) Sind $f, g \in T([a,b])$ reellwertig und gilt $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \ \le \int_a^b g(x)\ dx$.

(d) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \ \le \ \int_a^b |f(x)|\ dx \ \le \| f \|_\infty\ (b-a)$ für $f \in T([a,b])$.

Daß (a) und (b) gelten, ist einfach zu überprüfen. (Verwende die Definition Gleichung (1) und wähle eine gemeinsame Teilung von f und g.)

Ist $f \ge 0$, so sind alle Stufengrößen c_k nichtnegativ, also $\int_a^b f(x)\ dx \ \ge 0$. Damit folgt aus $g \ge f$ auch $\int_a^b g(x)\ dx \ \ge \int_a^b f(x)\ dx$.

Für (d) erhält man direkt aus einer Teilung $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ zu f:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\ (x_k - x_{k-1})\right| \ \le \ \sum_{k=1}^{n} |c_k|\ (x_k - x_{k-1}) \ \le \ \max |c_k|\ (b-a)$$

Bei der Erweiterung des Integrals auf größere Funktionsklassen als $T([a,b])$ ist das Vorgehen nicht mehr so eindeutig vorgeschrieben. Der einfachste Weg ist der, den Cauchy (1823) gewählt hat. Es läßt sich kurz sagen: Man dehne das Integral, das linear und stetig ist ((a) und (d)) aus auf den Abschluß von $T([a,b])$ in $(B([a,b]), \| \cdot \|_\infty)$.

Definition 10.1 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ heißt* **Regelfunktion** *(oder integrierbar im Cauchyschen Sinn), wenn sie im Abschluß von $T([a,b])$ im Banachraum $(B([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ liegt. Wir bezeichnen $R([a,b]) := \overline{T([a,b])}$. Damit ist f eine Regelfunktion, falls $f_n \in T([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$. Man sagt, die f_n konvergieren gleichmäßig gegen f).*

Wir haben $R([a,b])$ so gewählt, damit wir das Integral, das bisher für $f \in T([a,b])$ erklärt ist, auch für $f \in R([a,b])$ einfach definieren können.

Definition 10.2 *Sei $f \in R([a,b])$ eine Regelfunktion, und $f_n \in T([a,b])$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$. Definiere*

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

$\int_a^b f(x)\, dx$ heißt (Cauchy-)Integral von $f \in R([a,b])$.

Wir haben zu zeigen, daß dieser Grenzwert existiert und unabhängig von der gewählten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $T([a,b])$ ist.

Die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ sichern wir durch das Cauchy-Kriterium in $\mathbb{K}$. Es gilt nämlich mit (d) von vorher:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\, dx \; - \; \int_a^b f_m(x)\, dx \right| &\le \| f_n - f_m \|_\infty \; (b-a) \\ &\le \; (\| f_n - f \|_\infty \; + \; \| f - f_m \|_\infty) \; (b-a). \end{aligned}$$

Mit $\| f_n - f \|_\infty \to 0$ ist $\left(\int\limits_a^b f_n(x)\, dx \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$, und die Existenz des Grenzwertes gesichert.

Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n \in T([a,b])$, eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{n\to\infty} \| g_n - f \|_\infty = 0$, so gilt wiederum mit (d)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\, dx \; - \; \int_a^b g_n(x)\, dx \right| &\le \| f_n - g_n \|_\infty \; (b-a) \\ &\le \; (\| f_n - f \|_\infty \; + \; \| f - g_n \|_\infty) \; (b-a), \end{aligned}$$

und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, dx \; = \; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Wir haben nun belegt, daß die Definition 10.2 korrekt war.

Bemerkungen.

(1) Wir werden in Kürze eine Charakterisierung der Regelfunktionen geben, aus der unmittelbar folgt, daß $C([a, b]) \subseteq R([a, b])$ gilt. Also existiert für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ das (Cauchy-)Integral.

(2) $R([a, b])$ ist ein abgeschlossener $\mathbb{K}$-Unterraum von $B([a, b])$ (überprüfen!), also auch vollständig, wie man sich schnell überlegt. Somit ist $R([a, b])$ mit der $\| \cdot \|_\infty$-Norm ein Banachraum.

(3) Wichtige Ergebnisse zur Konvergenz von Funktionsfolgen bzgl. $\| \cdot \|_\infty$ (gleichmäßige Konvergenz) folgen noch.

Wir wollen nun ein Beispiel rechnen:

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = x.$

Wir zeigen, daß $f \in R([0, 1])$ und berechnen $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx.$

Wir setzen

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{k}{n} \quad \text{für } x \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad k = 1, ..., n$$

$$\text{und} \quad f_n(0) = 0$$

Es gilt für $x \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} \qquad \text{und } |f(0) - f_n(0)| = 0,$$

also $\| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{n}$. Somit ist $f \in R([0, 1])$ und

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\,\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

(Das haben wir natürlich erwartet!)

Die Regeln (a), (b), (c), (d) gelten auch für Regelfunktionen:

Satz 10.3 *Seien $f, g \in R([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gelten:*

(a) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$

(b) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$

(c) Sind f, g reellwertig, $f \leq g$, so gilt $\int_a^b f(x)\, dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\, dx.$

(d) $|f|$ ist eine Regelfunktion, und wir haben

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\, dx \;\leq \| f \|_\infty\; (b-a).$$

Beweis. (a) und (b) folgen sofort aus den Regeln für den Limes. Für (c) reicht es zu zeigen, daß aus $f \geq 0$ folgt $\int_a^b f(x)\, dx \;\geq 0$.
Ist $f \geq 0$ und $f_n \in T([a,b])$ mit $\| f - f_n \|_\infty \to 0$, so gilt für $f_n^+ := \max\{f_n(x), 0\}$ erst recht $\| f - f_n^+ \|_\infty \to 0$. Mit $f_n^+ \in T([a,b])$ und $\int_a^b f_n^+(x)\, dx \;\geq 0$ folgt auch $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.

Für (d) beachte man, daß $|\; |f(x)| - |f_n(x)|\; | \leq |f(x) - f_n(x)|$ für alle $x \in [a,b]$. Also gilt $\| \;|f| - |f_n|\; \|_\infty \leq \| f - f_n \|_\infty$. Da mit $f_n \in T([a,b])$ auch $|f_n| \in T([a,b])$ ist, folgt $|f| \in R([a,b])$. Für die Treppenfunktionen f_n wissen wir

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx \right| \;\leq\; \int_a^b |f_n(x)|\, dx \;\leq \| f_n \|_\infty\; (b-a)$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0$. Da jeweils

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b f_n(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x)|\, dx \;=\; \int_a^b |f(x)|\, dx$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n \|_\infty = \| f \|_\infty$, folgen die Ungleichungen auch für f. $\diamond$

Bemerkung. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $f \in R([a,b])$, so folgt auch Re f, Im $f \in R([a,b])$. Außerdem gilt

$$\int_a^b (\mathrm{Re}\; f)(x)\, dx \;=\; \mathrm{Re} \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{und} \quad \int_a^b (\mathrm{Im}\; f)(x)\, dx \;=\; \mathrm{Im} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Satz 10.4 *Seien $a < b < c$ reelle Zahlen, $f : [a,c] \to \mathbb{K}$. Dann gilt: $f \in R([a,c])$ genau dann, wenn $f|[a,b] \in R([a,b])$ und $f|[b,c] \in R([b,c])$. Es gilt, falls $f \in R([a,c])$,*

$$\int_a^c f(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx \;+\; \int_b^c f(x)\, dx.$$

Beweis. Der Nachweis ist elementar. Man hat nur $f|[a,b]$ und $f|[b,c]$ mit Treppenfunktionen zu approximieren. Man nehme diese Treppenfunktionen zur Approximation von f. Umgekehrt liefert jede Treppenfunktion-Approximation von f — unter eventueller Hinzunahme von b als Stufe — Approximationen von $f|[a,b]$ und $f|[b,c]$. $\diamond$

Vereinbarungsgemäß setzt man für $a > b$

$$\int_a^b f(x)\, dx := -\int_b^a f(x)\, dx$$

und außerdem $\int_a^a f(x)\, dx \;= 0$.

Satz 10.5 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Es gilt $f \in R([a,b])$ genau dann, wenn für jedes $x \in]a,b[$ sowohl der linksseitige Grenzwert $f(x-)$ als auch der rechtsseitige Grenzwert $f(x+)$ existiert, und wenn für $x = a$ der rechtsseitige Grenzwert $f(a+)$ und für $x = b$ der linksseitige Grenzwert $f(b-)$ exisitert.*

Beweis. Sei f approximierbar durch Treppenfunktionen bzgl. $\| \cdot \|_\infty$. Ferner sei $x_0 \in [a,b[$, $\epsilon > 0$. Es existiert $g \in T([a,b])$, so daß $\| f - g \|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Dann existiert ein Intervall $]x_0, a_j[$, so daß $g| \;]x_0, a_j[\; = c$ wobei a_j aus einer Teilung von g . Für $x, y \in]x_0, a_j[$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \; \leq \; |f(x) - g(x)| \; + \; |g(y) - f(y)| \; < \epsilon$$

Mit dem Cauchy-Kriterium in $\mathbb{K}$ existiert $f(x_0+)$.

Analog argumentiert man für $x_0 \in]a,b]$, um die Existenz von $f(x_0-)$ zu begründen.

Für die umgekehrte Beweisrichtung sei vorausgesetzt, daß $f(x_0+)$ für $x_0 \in [a,b[$ und $f(x_0-)$ für $x_0 \in]a,b]$ existieren. Wir nehmen an, daß f **nicht** durch Treppenfunktionen approximiert werden kann. D.h., es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß $\| f - g \|_\infty \geq \epsilon$ für alle $g \in T([a,b])$ gilt. Wir konstruieren daraus induktiv eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}_0}$, so daß gilt

$$\sup_{x \in [a_n, b_n]} |f(x) - g(x)| \; \geq \epsilon \qquad \text{für alle } g \in T([a_n, b_n]) \qquad (*)$$

Setze $[a_0, b_0] \; = [a,b]$. Seien $[a_0, b_0], [a_1, b_1], ..., [a_n, b_n]$ mit $(*)$ (und natürlich $a_0 \leq ... \leq a_n < b_n \leq ... \leq b_0$) gefunden. Setze $M = \frac{1}{2}\,(a_n + b_n)$. Dann müssen auf mindestens einer der Hälften $[a_n, M]$ oder $[M, b_n]$ auch alle Treppenfunktionen den $\| \cdot \|_\infty$-Abstand von f größer oder gleich ϵ haben.

Sei $x_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [a_n, b_n]$. Wir nehmen an, daß $x_0 \in]a,b[$. Da $f(x_0+), f(x_0-)$ existieren, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0+)| \; < \epsilon \;\; \forall \, x \in]x_0, x_0 + \delta[\qquad \text{und}$$

$$|f(x) - f(x_0-)| \; < \epsilon \qquad \forall \, x \in]x_0 - \delta, x_0[\, .$$

Nun gibt es $n \in \mathbb{N}$, so daß $[a_n, b_n] \; \subseteq]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Definiert man $g : [a_n, b_n] \to \mathbb{K}$ eine Treppenfunktion auf $[a_n, b_n]$

$$g(x) \; = \begin{cases} f(x_0-) & x \in [a_n, x_0[\\ f(x_0) & x = x_0 \\ f(x_0+) & x \in]x_0, b_n] \end{cases}$$

so gilt $\sup_{x \in [a_N, b_N]} |f(x) - g(x)| \; < \epsilon$ im Widerspruch zu $(*)$.
Damit ist gezeigt, daß $f \in R([a,b])$. ◇

Korollar 10.6 *Jede stetige Funktion ist Regelfunktion, d.h. $C([a,b]) \; \subseteq R([a,b])$. Jede monotone Funktion ist Regelfunktion.*

Beweis. Ist $f \in C([a,b])$, so gilt $f(x+) = f(x) = f(x-)$ für $x \in]a,b[$ und $f(a+) = f(a)$, $f(b-) = f(b)$. Mit Satz 10.5 gilt $f \in R([a,b])$. Ist f monoton, so benutze Satz 7.11. ◇

Satz 10.7 *Sei $f \in R([a,b])$, und setze für $x \in [a,b]$*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt.$$

Dann ist $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ gleichmäßig stetig. Ist f in $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$F'(x_0) \;=\; f(x_0)$$

Beweis. Für $a \leq x < y \leq b$ gilt mit Satz 10.4

$$|F(y) - F(x)| \;=\; \left|\int_x^y f(t)\, dt\right| \;\leq \| f \|_\infty (y - x)$$

Ist $\epsilon > 0$ so wähle $\delta = \dfrac{\epsilon}{\| f \|_\infty}$, ($f$ soll nicht die Nullfunktion sein), und man sieht, daß F gleichmäßig stetig ist.

Sei nun f in x_0 stetig. Zu $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so daß $|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $t \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b]$. Dann gilt für solche $t \neq x_0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{t - x_0} \int_{x_0}^t f(s)\, ds \;-\; \frac{1}{t - x_0} \int_{x_0}^t f(x_0)\, ds\right| \\ &= \left|\frac{1}{t - x_0} \int_{x_0}^t (f(s) - f(x_0))\; ds\right| < \epsilon.\end{aligned}$$

Daraus folgt $F'(x_0) \;= f(x_0)$. ◇

Der folgende Satz zeigt uns, wie die meisten Integrale zu lösen sind, nämlich über die Stammfunktionen, vgl. Definition 9.13. Man nennt dieses Theorem zusammen mit Satz 10.7 auch Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, da Differenzieren und Integrieren in Beziehung gesetzt werden.

Satz 10.8 *Ist $f \in R([a,b])$ und existiert eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{K}$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a).$$

F ist eine (bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte) **Stammfunktion** *von f.*

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$. Es gibt $g \in T([a,b])$ mit $\| \; f - g \; \|_\infty \; < \; \dfrac{1}{m(b-a)}$, und dazu eine Teilung von g: $a = a_0 < a_1 < ... < a_{n_m} = b$, so daß $g| \;]a_{k-1}, a_k[\; = c_k$ für $k = 1, ..., n_m$. Mit dem Mittelwertsatz (Satz 9.11) existieren $\xi_k \in \;]a_{k-1}, a_k[$ mit $F(a_k) - F(a_{k-1}) \; = f(\xi_k) \; (a_k - a_{k-1})$, da F als differenzierbar vorausgesetzt ist. Wir haben nun

$$\left| \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k) \; (a_k - a_{k-1}) \; - \; \sum_{k=1}^{n_m} c_k(a_k - a_{k-1}) \right|$$

$$\leq \; \sum_{k=1}^{n_m} |f(\xi_k) - c_k| \; (a_k - a_{k-1}) \; < \; \frac{1}{m(b-a)} \; \sum_{k=1}^{n_m} (a_k - a_{k-1}) \; = \; \frac{1}{m}$$

und andererseits

$$\sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k) \; (a_k - a_{k-1}) \; = \; \sum_{k=1}^{n_m} (F(a_k) - F(a_{k-1})) \; = \; F(b) - F(a),$$

und folglich

$$\left| (F(b) - F(a)) \; - \; \sum_{k=1}^{n_m} c_k \; (a_k - a_{k-1}) \right| \; < \; \frac{1}{m}.$$

Mit $m \to \infty$ streben die Summen $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_m} c_k(a_k - a_{k-1})$ gegen $\displaystyle\int_a^b f(x) \; dx$, und damit ist der Beweis vollständig geführt. $\diamond$

Bemerkung: Setzt man in Satz 10.8 sogar $f \in C([a,b])$ voraus, so folgt die Behauptung sofort aus Satz 10.7. Denn bezeichnet man für den Moment $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t) \; dt$, so gilt $G'(x) = f(x)$ mit Satz 10.7. Damit haben wir $F'(x) = G'(x)$ für alle $x \in [a,b]$, und folglich ist $G - F$ eine Konstante. Da $G(a) = 0$, ist diese Konstante gleich $-F(a)$. Somit gilt $G(x) = F(x) - F(a)$ und

$$\int_a^b f(t) \; dt \; = \; G(b) \; = \; F(b) - F(a).$$

Mit Satz 10.8 hat man nun eine sehr praktische Methode, das Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ zu berechnen, vorausgesetzt man kennt eine Stammfunktion von f. Satz 10.7 sagt uns, daß zumindest jedes stetige f eine Stammfunktion besitzt. Es gibt zahlreiche Tabellen, in denen eine Stammfunktion zu gegebenem f angegeben ist.

(1) $f(x) = x^a, \quad F(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1) \qquad x > 0$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad F(x) = \ln(x) \qquad x > 0$

(3) $f(x) = e^x, \quad F(x) = e^x \qquad x \in \mathbb{R}$

(4) $f(x) = \ln(x), \quad F(x) = x\ln(x) - x \qquad x > 0$

(5) $f(x) = \sin(x), \quad F(x) = -\cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}$

(6) $f(x) = \cos(x), \quad F(x) = \sin(x) \qquad x \in \mathbb{R}$

u.s.w.

Es gibt auch sehr nützliche Regeln für die Berechnung von Integralen.

Satz 10.9 (Partielle Integration) *Seien $f, g \in R([a,b])$, zu denen differenzierbare Funktionen F und G existieren mit $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt:*

$$\int_a^b F(x)\, g(x)\, dx \;=\; F(b)G(b) \;-\; F(a)G(a) \;-\; \int_a^b f(x)\, G(x)\, dx.$$

Beweis. Man setze $H(x) = F(x)G(x)$. Mit der Produktregel (Satz 9.3) gilt $H'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Man beachte, daß H' eine Regelfunktion ist (etwa wegen Satz 10.5). Nun wende Satz 10.8 an, und man erhält

$$\begin{aligned} F(b)G(b) \;-\; F(a)G(a) \;&=\; H(b) - H(a) \;=\; \int_a^b H'(x)\, dx \\ &=\; \int_a^b f(x)\, G(x)\, dx \;+\; \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx. \end{aligned}$$

◇

Satz 10.10 (Substitutionsregel) *Sei $f \in C([A,B])$, und bezeichne F eine Stammfunktion von f. Sei ferner $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (d.h. φ' existiert und ist stetig) mit $\varphi([a,b]) \subseteq [A,B]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

Beweis. Da wir f stetig vorausgesetzt haben, besitzt f eine Stammfunktion. Beachte auch, daß $(f \circ \varphi)\, \varphi' \in C([a,b]) \subseteq R([a,b])$ gilt. Mit der Kettenregel (Satz 9.4) gilt: Ist F Stammfunktion von f, so ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\, \varphi'$.
Mit Satz 10.8 folgt nun

$$\int_a^b f(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy \;=\; F \circ \varphi(b) \;-\; F \circ \varphi(a) \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

◇

Meistens schreibt man für die Stammfunktionen $F+c$ von f einfach das Symbol $\int f(x)dx$. Natürlich ist $\int f(x)dx$ also auch bis auf eine additive Konstante festgelegt. (Man nennt $\int f(x)dx$ das unbestimmte Integral von f.)

Beispiel:

Berechnung der Integrale $\int \cos^n(x)\, dx$ und $\int \sin^n(x)\, dx$.
Dazu leiten wir eine Rekursionsformel mit partieller Integration her.

Man nehme $F = \cos^{n-1}$, $G = \sin$. Dann ist $f = -(n-1)\ \cos^{n-2}\sin$, $g = \cos$. Mit Satz 10.9

$$\int \cos^n(x)\, dx \ = \ \cos^{n-1}(x)\ \sin(x) \ + \ (n-1) \int \cos^{n-2}(x)\ \sin^2(x)\, dx,$$

also

$$\int \cos^n(x)\, dx \ = \ \cos^{n-1}(x)\ \sin(x) \ + \ (n-1) \int \cos^{n-2}(x)\ \Big(1-\cos^2(x)\Big)\ dx.$$

Einfaches Umstellen ergibt

$$n \int \cos^n(x)\, dx \ = \ \cos^{n-1}(x)\ \sin(x) \ + \ (n-1) \int \cos^{n-2}(x)\, dx \tag{10.2}$$

Genauso folgt

$$n \int \sin^n(x)\, dx \ = \ -\sin^{n-1}(x)\ \cos(x) \ + \ (n-1) \int \sin^{n-2}(x)\, dx \tag{10.3}$$

Mit den speziellen Grenzen $a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}$ erhält man für die Folge $c_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx$:

$$(2n)\ c_{2n} \ = \ 2n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\, dx \ = \ (2n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(x)\, dx \ = \ (2n-1)\ c_{2n-2}$$

Daraus folgt

$$c_{2n} \ = \ \frac{2n-1}{2n}\, c_{2n-2} \ = \ \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx \ = \ \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2} \tag{10.4}$$

Ebenso gilt

$$(2n+1)\ c_{2n+1} \ = \ 2n\ c_{2n-1}, \qquad \text{und folglich}$$

$$c_{2n+1} \ = \ \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos(x)\, dx \ = \ \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 \tag{10.5}$$

Damit können wir das Wallissche Produkt berechnen.

Setze

$$w_n := \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\ \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} \ = \ \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}\ \frac{\pi}{2}.$$

Wir begründen nun, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1$, woraus dann

$$\lim_{n\to\infty} w_n \ = \ \frac{\pi}{2} \tag{10.6}$$

folgt.

Aus $\cos^{2n} \geq \cos^{2n+1} \geq \cos^{2n+2}$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$, folgt $c_{2n} \geq c_{2n+1} \geq c_{2n+2}$ und daraus erhält man

$$1 \;\geq\; \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} \;\geq\; \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} \;=\; \frac{2n+1}{2n+2} \to 1.$$

Damit ist (10.6) bewiesen.

Nun können wir auch eine offene Frage aus Kapitel 4, Beispiel 2 (nach Korollar 4.6) erledigen. Dort ist

$$p_n \;=\; \frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}.$$

Nun ist aber $w_n \;=\; p_n^2\,\dfrac{1}{2n+1}$. Aus Kapitel 4 wissen wir, daß $\dfrac{p_n^2}{2n+1} \;\to\; \dfrac{\alpha^2}{2}$. Da $w_n \to \dfrac{\pi}{2}$ nach dem gerade Bewiesenen, folgt $\alpha = \sqrt{\pi}$.

Anwendungen der Substitutionsregel finden sich in den Übungsaufgaben.

Als nächstes führen wir das Riemann-Stieltjes-Integral ein. Eine Motivation liegt in der Statistik. Auch eine physikalische Überlegung führt zu diesem Integral. Die Punkte $a_1, ..., a_n$ der x-Achse seien mit den Massen $m_1, ..., m_n$ belegt. Der Schwerpunkt dieses Punktesystems ist $x_s \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} m_k a_k / \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$.

Als kontinuierliches Analogon sei auf dem Intervall $[a, b]$ Masse verteilt, und zwar gemäß einer Belegungsfunktion $m(x)$, für die $m(x)$ die im Intervall $[a, x]$ vorhandene Masse beschreibt, also ist $m(b) =: M$ die Gesamtmasse auf $[a, b]$.
Ist nun $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ eine Teilung von $[a, b]$ und $\eta_k \in [a_{k-1}, a_k]$, so ist rein von der Anschauung

$$\tilde{x}_s \;=\; \frac{1}{M}\;\sum_{k=1}^{n} \eta_k\;\left(m(a_k) - m(a_{k-1})\right)$$

eine Näherung für den Schwerpunkt des Massesystems.

Im folgenden ist $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Für jede reellwertige, beschränkte Funktion $f \in B([a, b])$ und jede Teilung $a < a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ (wir benutzen abkürzend P für eine Teilung) setzen wir

$$M_k := \sup_{a_{k-1} \leq x \leq a_k} f(x), \qquad m_k := \inf_{a_{k-1} \leq x \leq a_k} f(x)$$

und schließlich

$$O(f, P, \alpha) := \sum_{k=1}^{n} M_k\;\left(\alpha(a_k)\; - \alpha(a_{k-1})\right),$$

$$U(f, P, \alpha) := \sum_{k=1}^{n} m_k\;\left(\alpha(a_k)\; - \alpha(a_{k-1})\right).$$

Offensichtlich gelten:

(i) $U(f, P, \alpha) \leq O(f, P, \alpha)$

(ii) Ist P_1 feiner als P_2, so ist $U(f,P_2,\alpha) \le U(f,P_1,\alpha)$ und $O(f,P_2,\alpha) \ge O(f,P_1,\alpha)$.

(iii) Sind $P, \tilde{P}$ zwei beliebige Teilungen, so gilt $U(f,P,\alpha) \le O(f,\tilde{P},\alpha)$.

Während (i) und (ii) unmittelbar aus der Definition von $U(f,P,\alpha)$ und $O(f,P,\alpha)$ folgen, erhält man (iii), indem man eine Teilung P' wählt, die feiner als P und $\tilde{P}$ ist. Mit (i) und (ii) folgt dann

$$U(f,P,\alpha) \;\le\; U(f,P',\alpha) \;\le\; O(f,P',\alpha) \;\le\; O(f,\tilde{P},\alpha).$$

Insbesondere ist mit feiner werdenden Teilungen $U(f,P,\alpha)$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, und $O(f,P,\alpha)$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Damit existieren

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) := \inf_P O(f,P,\alpha) \;\in \mathbb{R}$$

und

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) := \sup_P U(f,P,\alpha) \;\in \mathbb{R},$$

und es gilt mit (ii)

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \;\le\; \overline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \tag{10.7}$$

Definition 10.11 *Sei $f \in B([a,b])$. Gilt in (10.7) sogar Gleichheit, so heißt f* **bezüglich $\boldsymbol{\alpha}$ Riemann-Stieltjes-integrierbar**, *und man bezeichnet dann*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) := \underline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x)$$

und nennt $\displaystyle\int_a^b f(x)\ d\alpha(x)$ *das* **Riemann-Stieltjes-Integral** *von f* **bezüglich $\boldsymbol{\alpha}$** *über $[a,b]$. In Zeichen: $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Bemerkung; Ist speziell $\alpha(x) = x$, so schreibt man $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ und nennt dieses Integral **Riemann-Integral** von f.

Das Riemann-Integral ist also ein Sonderfall des Riemann-Stieltjes-Integrals. Betrachtet man die gebildeten Summen $O(f,P,\alpha)$, $U(f,P,\alpha)$ für $\alpha(x) = x$, so läßt sich vermuten, daß Cauchy-Integral und Riemann-Integral für Regelfunktionen $f \in R([a,b])$ identisch sind. Es gibt allerdings Riemann-integrierbare Funktionen f, die nicht in $R([a,b])$ liegen. Ist $\alpha(x) = x$, so schreiben wir künftig $f \in \mathcal{R}$ statt $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Man sollte einige der folgenden Resultate für den besonderen Fall $\alpha(x) = x$ mit den Ergebnissen zum Cauchy-Integral vergleichen.

Satz 10.12 *Es gilt $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a,b]$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Teilung P existiert mit*

$$O(f,P,\alpha) \;-\; U(f,P,\alpha) \;< \epsilon. \tag{10.8}$$

Beweis. Gelte (10.8). Da für jedes P gilt

$$U(f,P,\alpha) \ \le \ \underline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) \ \le \ \overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) \ \le \ O(f,P,\alpha),$$

folgt aus (10.8), daß $\underline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) \ = \overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x)$ gilt.

Sei nun $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ vorausgesetzt. Dann exisitiert zu $\epsilon > 0$ eine Teilung P_1 mit $O(f,P_1,\alpha) - \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \ < \frac{\epsilon}{2}$, und eine Teilung P_2 mit $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \ - U(f,P_2,\alpha) \ < \frac{\epsilon}{2}$. Ist nun P feiner als P_1 und P_2, so folgt

$$O(f,P,\alpha) \ \le \ O(f,P_1,\alpha) \ < \ \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \ + \ \frac{\epsilon}{2} \ < \ U(f,P_2,\alpha) \ + \epsilon \ \le \ U(f,P,\alpha) \ + \epsilon,$$

also (10.8). $\diamond$

Das folgende Ergebnis besagt, daß das Riemann-Stieltjes-Integral nicht nur durch Infima bzw. Suprema von f auf den kleinen Teilungsintervallen $[a_{k-1},a_k]$ bestimmt wird, sondern daß wir beliebige Funktionswerte $f(\xi_k),\ \xi_k \in [a_{k-1},a_k]$ wählen dürfen.

Satz 10.13 *Sei $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, und seien $\epsilon > 0$, $P = \{a_0,...,a_n\}$ dazu bestimmt, so daß (10.8) in Satz 10.12 gilt. Dann folgt*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \ (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \ - \ \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \right| < \epsilon, \tag{10.9}$$

wobei $\xi_k \in [a_{k-1},a_k],\ \ k = 1,...,n$.

Beweis. Offensichtlich gilt $f(\xi_k) \ \in [m_k, M_k]$, also

$$U(f,P,\alpha) \ \le \ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \ (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \ \le \ O(f,P,\alpha)$$

Daraus folgt sofort (10.9). $\diamond$

Ob eine konkrete Funktion f in $\mathcal{R}(\alpha)$ liegt, hängt natürlich auch von α ab. Der folgende Satz beinhaltet aber, daß $C([a,b]) \ \subseteq \mathcal{R}(\alpha)$ gilt für alle α. (Vorausgesetzt ist nach wie vor, daß α monoton wachsend ist.)

Satz 10.14 *Es gelten:*

(1) $C([a,b]) \subseteq \mathcal{R}(\alpha)$

(2) Ist α zusätzlich stetig auf $[a,b]$, so liegt jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $\mathcal{R}(\alpha)$.

Beweis. Wir merken an, daß der Fall $\alpha \equiv c$ immer $\int_a^b f(x)\ d\alpha(x) \ = 0$ für alle $f \in B([a,b])$ liefert. Dieser uninteressante Randfall wird im folgenden ausgeschlossen.

(1) Sei $\epsilon > 0$. Setze $\eta = \dfrac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}$. Da f gleichmäßig stetig ist (siehe Satz 8.20), existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(x) - f(y)| \ < \ \frac{\eta}{2} \qquad \text{für alle } x, y \in [a,b], \quad |x - y| \ < \delta.$$

Sei $P = \{a_0, ..., a_n\}$ eine Teilung von $[a,b]$ mit $\min\limits_{k=1,...,n} (a_k - a_{k-1}) \ < \delta$, so folgt damit $M_k - m_k \leq \dfrac{\eta}{2}$, $k = 1, ..., n$. Folglich

$$\begin{aligned} O(f,P,\alpha) \ - \ U(f,P,\alpha) \ &= \ \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \ (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \\ &\leq \ \frac{\eta}{2} \ (\alpha(b) - \alpha(a)) \ = \ \frac{\epsilon}{2} \ < \epsilon. \end{aligned}$$

Satz 10.12 liefert die Behauptung.

(2) Wir betrachten nur den Fall, daß f monoton wächst.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Zwischenwertsatz (Korollar 7.8) — angewendet auf α — können wir sukzessive Punkte $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ bestimmen, so daß

$$\alpha(a_k) \ - \ \alpha(a_{k-1}) \ = \ \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}.$$

Da f monoton wachsend ist, gilt $M_k \ = \ f(a_k)$, $m_k \ = \ f(a_{k-1})$, und folglich für $P = \{a_0, ..., a_n\}$

$$O(f,P,\alpha) - U(f,P,\alpha) \ = \ \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{k=1}^{n} (f(a_k) - f(a_{k-1})) \ = \ \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \ (f(b) - f(a)).$$

Mit $n \to \infty$ (und Satz 10.12) folgt die Behauptung.

$\diamond$

Bisher haben wir das Riemann-Stieltjes-Integral nur für reellwertige $f \in B([a,b])$ erklärt. Ist $f \in B([a,b])$ komplexwertig, so betrachte $\mathrm{Re}\ f \in B([a,b])$ und $\mathrm{Im}\ f \in B([a,b])$. Sind $\mathrm{Re}\ f \in \mathcal{R}(\alpha)$ und $\mathrm{Im}\ f \in \mathcal{R}(\alpha)$, so setzen wir

$$\int_a^b f(x)\ d\alpha(x) := \ \int_a^b \mathrm{Re}\ f(x)\ d\alpha(x) \ + i \int_a^b \mathrm{Im}\ f(x)\ d\alpha(x) \qquad (10.10)$$

und schreiben $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ und nennen f Riemann-Stieltjes-integrierbar bzgl. α. Natürlich heißt das in (10.10) erklärte Integral auch Riemann-Stieltjes-Integral von f bzgl. α. Wir haben die Eigenschaften wie Linearität, Monotonie, Beschränktheit, wie erwartet.

Satz 10.15 *Seien $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Es gelten* *(i)* $f+g \in \mathcal{R}(\alpha), \quad \lambda f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *und*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\, d\alpha(x) \;=\; \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \;+\; \int_a^b g(x)\, d\alpha(x)$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, d\alpha(x) \;=\; \lambda \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

(ii) Sind f, g *reellwertig,* $f \le g$, *so gilt*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \;\le\; \int_a^b g(x)\, d\alpha(x)$$

(iii) Es gilt $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ *und*

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)\right| \;\le\; \int_a^b |f(x)|\, d\alpha(x) \;\le\; \| f \|_\infty \; (\alpha(b)-\alpha(a))$$

Beweis. (i) und (ii) folgen unmittelbar aus der Definition. Gegebenenfalls hat man Realteil und Imaginärteil separat zu studieren.
(iii) Den Nachweis von $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ verschieben wir bis nach dem folgenden Hilfssatz.
Sei $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$ so gewählt, daß $u\int_a^b f(x) d\alpha(x) \;=\; \left|\int_a^b f(x) d\alpha(x)\right|$. Damit folgt aus (i) und (ii)

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)\right| \;=\; u\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \;=\; \int_a^b uf(x)\, d\alpha(x)$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}\,(uf)(x)\, d\alpha(x) \;+\; i\int_a^b \mathrm{Im}\,(uf)(x)\, d\alpha(x) \;=\; \int_a^b \mathrm{Re}\,(uf)(x)\, d\alpha(x)$$

$$\le \int_a^b |uf|(x)\, d\alpha(x) \;=\; \int_a^b |f(x)|\, d\alpha(x) \;\le\; \| f \|_\infty \; (\alpha(b)-\alpha(a)).$$

◇

Lemma 10.16 *Sei* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *auf* $[a,b]$ *und reellwertig mit* $m \le f \le M$. *Ferner sei* $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ *stetig. Setze* $h(x) := \varphi \circ f(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$. *Dann gilt* $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ *auf* $[a,b]$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da φ gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $0 < \delta < \epsilon$ und $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in [m, M]$ mit $|x-y| < \delta$. Sei $P = \{a_0, ..., a_n\}$ eine Teilung von $[a,b]$ mit

$$O(f, P, \alpha) \;-\; U(f, P, \alpha) \;< \delta^2.$$

Seien m_k, M_k die Infima und Suprema von f auf $[a_{k-1}, a_k]$ und $\tilde{m}_k, \tilde{M}_k$ diejenigen von h auf $[a_{k-1}, a_k]$. Wir teilen $\{1, ..., n\}$ ein in zwei Klassen

$$A := \{k : M_k - m_k < \delta\}, \qquad B := \{k : M_k - m_k \ge \delta\}$$

Für $k \in A$ folgt nach Wahl von $\delta > 0$, daß $\tilde{M}_k - \tilde{m}_k \leq \epsilon$ gilt. Für $k \in B$ gilt sicherlich $\tilde{M}_k - \tilde{m}_k \leq 2 \parallel \varphi \parallel_\infty$ mit $\parallel \varphi \parallel_\infty := \max\limits_{x \in [m,M]} |\varphi(x)|$. Wir haben nun

$$
\begin{aligned}
\delta \sum_{k \in B} (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \ &\leq \ \sum_{k \in B} (M_k - m_k) \ ((\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \\
&\leq \ \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \ (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \ < \delta^2,
\end{aligned}
$$

also $\sum\limits_{k \in B} (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \ < \delta$. Folglich gilt

$$
\begin{aligned}
O(h,P,\alpha) - U(h,P,\alpha) \ &= \ \sum_{k \in A} (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k) \ (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) + \sum_{k \in B} (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k) \ (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \\
&\leq \ \epsilon \ (\alpha(b) - \alpha(a)) \ + 2 \parallel \varphi \parallel_\infty \delta \ \leq \ \epsilon \ (\alpha(b) - \alpha(a) + 2 \parallel \varphi \parallel_\infty).
\end{aligned}
$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt $h \in \mathcal{R}(\alpha)$. $\diamond$

Korollar 10.17 *Sind $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$, so sind $f \cdot g \in \mathcal{R}(\alpha)$ und $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$. Sind f, g reellwertig, so gilt* $\max(f,g)$, $\min(f,g) \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Beweis. Seien f und g zunächst reellwertig. Setze in Lemma 10.16 $\varphi(x) = x^2$. Damit ist $f^2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, falls $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Aus $fg \ = \frac{1}{4} \left((f+g)^2 - (f-g)^2 \right)$ folgt $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$. Über gesonderte Betrachtung von Realteil und Imaginärteil folgt $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$ auch für komplexwertige $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Mit $|f(x)| \ = \left(\text{ Re } f^2(x) + \text{ Im } f^2(x) \right)^{1/2}$ reicht es nochmals, Lemma 10.16 heranzuziehen, und zwar mit $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

Schließlich beachte: $\max(f,g) \ = \dfrac{f+g}{2} + \dfrac{|f-g|}{2}$, $\min(f,g) \ = \dfrac{f+g}{2} - \dfrac{|f-g|}{2}$. $\diamond$

Eine weitere Rechenregel ist:

Ist $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ und $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$, so gilt $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ und

$$
\int_a^b f(x) \ d(\alpha_1 + \alpha_2)(x) \ = \ \int_a^b f(x) \ d\alpha_1(x) \ + \ \int_a^b f(x) \ d\alpha_2(x)
$$

(Der Beweis folgt direkt aus der Definition)

Wir wollen nun zwei wichtige Spezialfälle für α genauer studieren. Bezeichne für $x \in \mathbb{R}$

$$
H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \qquad \text{(Heaviside-Funktion)}
$$

Satz 10.18 *Sei $s \in \,]a,b[$, $f \in B([a,b])$ und stetig in s. Bezeichne $\alpha_s(x) := H(x-s)$. Dann gilt:*

$$
\int_a^b f(x) \ d\alpha_s(x) \ = f(s)
$$

Beweis. Betrachte die Teilung $P = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ mit $a = a_0 < a_1 = s < a_2 < a_3 = b$. Dann gilt

$$O(f, P, \alpha_s) \;=\; M_1(0-0) \;+ M_2(1-0) \;+ M_3(1-1) \;= M_2$$

und analog

$$U(f, P, \alpha_s) \;= m_2.$$

Da f stetig in s ist, folgt mit $a_2 \to s$ auch $M_2 = \sup\limits_{s \le x \le a_2} f(x) \to f(s)$ und $m_2 \to f(s)$.

Dann muß aber $\displaystyle\int_a^b f(x) d\alpha_s(x) \;= f(s)$ gelten. ◇

Satz 10.19 *Seien* $c_k \ge 0$ *mit* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *konvergent. Ferner seien* $s_n,\ n \in \mathbb{N}$ *verschiedene Punkte in* $]a, b[$ *. Betrachte die monoton wachsende Sprungfunktion* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k \alpha_{S_k}(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k H(x - s_k)$$

Sei $f \in C([a, b])$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\; d\alpha(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k f(S_k) \tag{10.11}$$

(D.h. für derartige Sprungfunktionen α *wird das Riemann-Stieltjes-Integral zu einer Reihe.)*

Beweis. Man beachte, daß $\alpha(x)$ für jedes $x \in [a, b]$ existiert. Man benutze etwa das Majorantenkriterium, aus dem auch $\alpha(x) \le \alpha(y)$ folgt für $x \le y$. Desweiteren ist $\alpha(a) = 0,\ \alpha(b) \;= \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.
(Mit $c_k = 0$ für $k = N+1, N+2, ...$ hat man auch endliche Summen.)

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k \;< \epsilon$, und setze

$$\alpha_1(x) := \sum_{k=1}^{N} c_k \alpha_{s_k}(x), \qquad \alpha_2(x) := \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k \alpha_{s_k}(x)$$

Mit Satz 10.18 und Satz 10.15(i) folgt

$$\int_a^b f(x)\; d\alpha_1(x) \;=\; \sum_{k=1}^{N} c_k f(s_k).$$

Mit $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) \ = \ \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} c_k \ < \epsilon$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, d\alpha_2(x) \right| \ \leq \ \| \, f \, \|_\infty \, \epsilon .$$

Da $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, folgt damit

$$\left| \int_a^b f(x) \, d\alpha(x) \ - \ \sum_{k=1}^{N} c_k f(s_k) \right| \ \leq \ \| \, f \, \|_\infty \, \epsilon .$$

Das heißt aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(s_k) \ = \ \int_a^b f(x) \, d\alpha(x).$$

◇

Satz 10.20 *Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar derart, daß $\alpha' \in \mathcal{R}$. Ferner sei $f \in B([a,b])$. Dann gilt $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ genau dann, wenn $f\alpha' \in \mathcal{R}$ ist. In diesem Fall hat man*

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x) \ = \ \int_a^b f(x)\alpha'(x) \, dx \tag{10.12}$$

(D.h. das Riemann-Stieltjes-Integral von f bzgl. α ist nichts anderes als das Riemann-Integral von $f\alpha'$.)

Beweis. Mit $\alpha' \in \mathcal{R}$ können wir Satz 10.12 anwenden. Also existiert zu $\epsilon > 0$ eine Teilung $P = \{a_0, ..., a_n\}$ von $[a,b]$ mit $O(\alpha', P, \mathrm{id}) \ - U(\alpha', P, \mathrm{id}) \ < \epsilon$. Diese Abschätzung gilt auch für jede feinere Teilung $P' \supseteq P$. Außerdem gibt es mit dem Mittelwertsatz (Satz 9.11) $\xi_k \in \,]a_{k-1}, a_k[$ mit $\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1}) \ = \alpha'(\xi_k) \, (a_k - a_{k-1})$ für alle $k = 1, ..., n$. Für ein beliebiges $\eta_k \in [a_{k-1}, a_k]$ folgt

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha'(\xi_k) - \alpha'(\eta_k)| \ (a_k - a_{k-1}) \ \leq \ O(\alpha', P, \mathrm{id}) \ - \ U(\alpha', P, \mathrm{id}) \ < \epsilon .$$

Daraus erhält man mit $\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1}) \ = \alpha'(\xi_k)(a_k - a_{k-1})$:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k) \ (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \ - \ \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\alpha'(\eta_k) \ (a_k - a_{k-1}) \right| \\ = & \left| \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\alpha'(\xi_k) \ (a_k - a_{k-1}) \ - \ \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\alpha'(\eta_k) \ (a_k - a_{k-1}) \right| \\ \leq & \ \| \, f \, \|_\infty \sum_{k=1}^{n} |\alpha'(\xi_k) - \alpha'(\eta_k)| \ (a_k - a_{k-1}) \ < \ \| \, f \, \|_\infty \, \epsilon . \end{aligned} \tag{10.13}$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k) \ (\alpha(a_k) - \alpha(a_{k-1})) \ \leq \ O(f\alpha', P, \mathrm{id}) + \ \| \, f \, \|_\infty \, \epsilon$$

für beliebige $\eta_k \in [a_{k-1}, a_k]$, und folglich

$$O(f, P, \alpha) \ \leq \ O(f\alpha', P, \mathrm{id}) + \ \| f \|_\infty \, \epsilon.$$

Genauso folgt

$$O(f\alpha', P, \mathrm{id}) \ \leq \ O(f, P, \alpha) + \ \| f \|_\infty \, \epsilon.$$

Dies gilt für jede feinere Teilung $P' \supseteq P$, woraus

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x) \, d\alpha(x) \ - \ \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x) \, dx \right| \ \leq \ \| f \|_\infty \, \epsilon$$

folgt. Da $\epsilon > 0$ beliebig wählbar ist, gilt

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, d\alpha(x) \ = \ \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x) \, dx$$

für jede beschränkte Funktion f.

Entsprechend zeigt man

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, d\alpha(x) \ = \ \underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x) \, dx.$$

Nun folgt die komplette Behauptung des Satzes. $\diamond$

Am Ende dieses Paragraphen haben wir noch einen wichtigen Punkt zu erläutern. Für $\alpha = \mathrm{id}$ haben wir nämlich zwei Integrale: Das Cauchy-Integral und das Riemann-Integral auf $[a, b]$.

Das Riemann-Integral ist das allgemeinere Integral. Denn es gilt $R([a, b]) \subseteq \mathcal{R}$, und auf $R([a, b])$ stimmen beide Integrale überein. Dazu hat man nur zu beachten, daß beide Integrale auf $T([a, b])$ den gleichen Wert ergeben. Alsdann hat man einen Satz über gleichmäßige Konvergenz und Integration im nächsten Paragraphen zu zitieren, und man ist fertig. Insbesondere sind alle stetigen Funktionen und monotonen Funktionen auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, was wir bereits mit Satz 10.14 wissen.

Natürlich sollte man eine Funktion $f \in \mathcal{R} \backslash R([a, b])$ angeben. Bezeichne $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) \ = \ \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Nun gilt $f \notin R([-1, 1])$, denn $f(0+)$ und $f(0-)$ existieren nicht. Andererseits gilt $f \in \mathcal{R}$, wie aus folgendem Kriterium folgt.

Satz 10.21 (Riemann) *Sei $f \in B([a, b])$ reellwertig. Es gilt $f \in \mathcal{R}$ genau dann, wenn für alle $\nu > 0$, $\sigma > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für jede Teilung $P = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ mit $l(P) := \max\limits_{k=1,...,n} (a_k - a_{k-1}) \ \leq \delta$ folgende Eigenschaft gilt:*

$$S_\sigma := \sum_{k \in A} (a_k - a_{k-1}) \ < \nu, \qquad \textit{wobei } A := \{a_k \in P : \ M_k - m_k \geq \sigma\}$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{R}$. Wähle mit Satz 10.12 ein $\delta > 0$ so, daß $O(f,P,\mathrm{id}) - U(f,P,\mathrm{id}) < \sigma\nu$, falls $l(P) \le \delta$. Dann gilt

$$\sigma S_\sigma \;\le\; \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,(a_k - a_{k-1}) \;=\; O(f,P,\mathrm{id}) \;-\; U(f,P,\mathrm{id}) \;<\; \sigma\nu,$$

also $S_\sigma < \nu$.

Für die umgekehrte Beweisrichtung sei $D \;=\; \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \;-\; \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Dann existiert zu $\nu > 0,\ \sigma > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$O(f,P,\mathrm{id}) \;-\; U(f,P,\mathrm{id}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,(a_k - a_{k-1})$$

$$= \sum_{k\in A} (M_k - m_k)\,(a_k - a_{k-1}) \;+\; \sum_{k\notin A} (M_k - m_k)\,(a_k - a_{k-1}) \;\le\; \nu D \;+\; \sigma\,(b-a)$$

für alle P mit $l(P) < \delta$.

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wähle nun $\nu \;=\; \dfrac{\epsilon}{2D},\ \ \sigma \;=\; \dfrac{\epsilon}{2(b-a)}$. Dann gilt
$O(f,P,\mathrm{id}) - U(f,P,\mathrm{id}) \;<\epsilon.$ $\diamond$

Kehren wir zum Beispiel

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

zurück. Seien $\nu, \sigma > 0$. Wähle $\alpha > 0$ mit $0 < 2\alpha < \nu$. Nun ist $|f'(x)| \;\le C \;\; \forall\, x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1]$, und folglich existiert mit dem Mittelwertsatz ein $\delta > 0$ mit $2\alpha + 2\delta < \nu$ so daß für alle P mit $l(P) \le \delta$ gilt

$$A \;=\; \{a_k \in P :\; M_k - m_k \;\ge \sigma\} \;\subseteq\; [-\delta-\alpha, \alpha+\delta]$$

Somit folgt

$$S_\sigma \;=\; \sum_{k\in A} (a_k - a_{k-1}) \;\le\; 2\alpha + 2\delta \;<\nu.$$

Mit Satz 10.21 gilt also $f \in \mathcal{R}$.

Ein Beispiel für $f \notin \mathcal{R}$ ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Betrachte hier $\nu = \frac{1}{2},\ \sigma = \frac{1}{3}$. Für jede Teilung P gilt $M_k - m_k = 1$, somit
$S_{1/3} \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \;= 1 \;> \dfrac{1}{2}.$

Wir merken noch an, daß Satz 10.7 und Satz 10.8 wortwörtlich für $f \in \mathcal{R}$ gelten. Der Beweis von Satz 10.8 läßt sich mit Satz 10.12 direkt übertragen. Bei Satz 10.7 ist überhaupt nichts zu ändern.

Uneigentliche Integrale der Art

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

(falls der Grenzwert existiert), werden wir nicht näher behandeln. Mit dem Lebesgue-Integral werden wir später einen sehr allgemeinen Zugang entwickeln.

11 Funktionsfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Die Problemstellung kann man am einfachsten an einigen Beispielen erörtern

(1) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) \ = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

Offensichtlich gilt für die Grenzfunktion $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \ = 0$

Für die Ableitungen gilt: : $f_n'(x) \ = \sqrt{n}\cos(nx)$, aber $f'(x) = 0$. Somit konvergiert f_n' keinesfalls gegen f'.

(2) Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) \ = n^2 x\ (1-x^2)^n$

Wir haben $f_n(0) = 0 \ = f_n(1)$ und für $x \in\ ]0,1[$ gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ = 0 \qquad (\text{da } n^2 q^n \ \to 0 \quad \text{für } 0 < q < 1)$$

Hingegen gilt

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n\ dx \ = \ \frac{1}{2}\int_0^1 y^n\ dy \ = \ \frac{1}{2}\ \frac{y^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 \ = \ \frac{1}{2n+2}$$

und folglich

$$\int_0^1 f_n(x)\ dx \ = \ n^2\ \frac{1}{2n+2} \ \to \infty$$

Somit konvergiert $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ nicht gegen $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \ = 0.$

Setzt man $g_n(x) \ = nx\ (1-x^2)^n$, so gilt $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)dx \ \to \frac{1}{2}$, aber $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx \ = 0.$

(3) Sei

$$f_m(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} (\cos(m!\,\pi x))^{2n} \ = \ \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \dfrac{k}{m!}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere gilt $f_m|[0,1] \ \in R([0,1])$.

Für die Grenzfunktion $f(x) \ = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ haben wir

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Ist nämlich $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, so gilt $f_m(x) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
Ist $x \in \mathbb{Q}$, etwa $x = \dfrac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z})$, so haben wir für $m \geq q$ auch $m!\,x \ = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m \cdot \dfrac{p}{q} \ \in \mathbb{Z}$. Also $f_m(x) \ = 1$ falls $m \geq q$. Damit ist $f|[0,1] \notin \mathcal{R}$.

An diesen Beispielen sehen wir, daß bei (punktweiser) Konvergenz von Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Differentiation, Integration mit der Limesbildung nicht vertauscht werden dürfen. Das letzte Beispiel zeigt sogar, daß für die Grenzfunktion das Riemann-Integral gar nicht gebildet werden kann. Mit anderen Worten: $\mathcal{R}$ ist nicht abgeschlossen unter punktweiser Konvergenz.

Wir kennen inzwischen für beschränkte Funktionen $f \in B(M)$ mit $\| f \|_\infty = \sup\limits_{x\in M} |f(x)|$ einen Konvergenzbegriff:

$$f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f \iff \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

(gleichmäßige Konvergenz!). Störend ist hierbei noch, daß wir prinzipiell nur beschränkte Funktionen betrachten können.

Definition 11.1 *Sei M eine Menge, $f_n : M \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f : M \to \mathbb{K}$ Funktionen. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* **gleichmäßig konvergent** *gegen f, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon \qquad \text{für alle } n \ge N \text{ und alle } x \in M$$

Letzteres ist äquivalent zu

$$\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad \text{mit } n \to \infty$$

Wir schreiben $f_n \to f$ gleichmäßig auf M.

Bemerkung: Sind alle $f_n, f \in B(M)$, so gilt $f_n \to f$ gleichmäßig auf M genau dann, wenn $f_n \to f$ bzgl. $\| \cdot \|_\infty$.

Das erste Ergebnis behandelt die gleichmäßige Konvergenz und die Stetigkeit.

Satz 11.2 *Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen $f_n : M \to \mathbb{K}$, die auf M gegen eine Grenzfunktion $f : M \to \mathbb{K}$ gleichmäßig konvergieren. Sind alle f_n (in einer Stelle $a \in M$) stetig, so ist f auch (in $a \in M$) stetig.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in M$, $n \ge N$, wegen der gleichmäßigen Konvergenz. Mit der Stetigkeit von f_N in a gibt es $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(a)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in M$ mit $d(x,a) < \delta$. Für die Grenzfunktion gilt dann
$|f(x) - f(a)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \epsilon$
für alle $x \in M$ mit $d(x,a) < \delta$. $\diamond$

Bemerkung: Es muß nicht notwendigerweise gleichmäßige Konvergenz vorliegen, damit eine punktweise Grenzfunktion f stetiger Funktionen f_n stetig ist. Die f_n von Beispiel (2) haben die Nullfunktion als Grenzfunktion. Die Funktionen f_n konvergieren aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Da $f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) \ = n^{3/2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \ \to \infty$, (denn $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$) gilt sogar: $\| f_n - 0 \|_\infty \to \infty$.

Ein Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz ist in Übungsaufgabe H17 (Kriterium von Dini) zu finden. Betrachten wir den $\mathbb{K}$-Vektorraum $C(M) \ = \{f : M \to \mathbb{K} : \ f \text{ stetig } \}$ so ist — wie wir wissen — $C(M)$ mit $\| f \|_\infty = \sup_{x\in M} |f(x)|$ (vgl. Korollar 8.9) ein normierter Raum. Mit Satz 11.2 erhält man

Korollar 11.3 *Sei M ein kompakter metrischer Raum. Dann ist $C(M)$ mit $\| \cdot \|_\infty$ ein Banachraum.*

Beweis. Man hat die Vollständigkeit zu zeigen. Vergleiche hierzu H19. $\diamond$

Als nächstes behandeln wir gleichmäßige Konvergenz und Integration.

Satz 11.4 *Sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{K}$ Funktionen aus $\mathcal{R}(\alpha)$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ konvergieren. Dann ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x)$$

(Insbesondere konvergiert auch $\left(\int_a^b f_n(x) d\alpha(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.)

Beweis. Es reicht, reellwertige f_n zu betrachten. Setzt man $\epsilon_n \ = \ \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$, so gilt für alle $x \in [a,b]$

$$f_n(x) \ - \epsilon_n \ \leq \ f(x) \ \leq f_n(x) \ + \epsilon_n$$

und damit

$$\int_a^b (f_n(x) - \epsilon_n)\, d\alpha(x) \ \leq \ \underline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \ \leq \ \overline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \ \leq \ \int_a^b (f_n(x) + \epsilon_n)\, d\alpha(x).$$

Umgeordnet erhält man

$$0 \ \leq \ \overline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \ - \ \underline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \ \leq \ 2\epsilon_n\, (\alpha(b) - \alpha(a)).$$

Mit $\epsilon_n \to 0$ folgt $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Desweiteren folgt aus Obigem:

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \ - \ \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x) \right| \ \leq \ \epsilon_n\, (\alpha(b) - \alpha(a)).$$

$\diamond$

Bemerkung: Mit Satz 11.4 folgt $R([a,b]) \subseteq \mathcal{R}$. Man vergleiche die Diskussion am Ende von Paragraph 10.

Korollar 11.5 *Sind $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$, und konvergiert die Reihe*

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig auf $[a, b]$ (d.h. die Partialsummen $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ konvergieren gleichmäßig gegen $f(x)$), so ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ und

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x).$$

Mit Blick auf Satz 11.4 betrachte man nochmals die Beispiele (2) und (3).

Nun wenden wir uns den Beziehungen zwischen gleichmäßiger Konvergenz und Differentiation zu. Mit Beispiel (1) sehen wir, daß gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es nicht ermöglicht, daß Differentiation und Grenzwert vertauscht werden dürfen.

Satz 11.6 *Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ stetig differenzierbare Funktionen, die punktweise gegen die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ konvergieren. Die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig auf $[a, b]$. Dann ist f differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Beweis. Sei $\tilde{f} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$. Mit Satz 11.2 ist $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Mit Satz 10.8 gilt für alle $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \;=\; f_n(a) \;+\; \int_a^x f_n'(t)\, dt.$$

Mit Satz 11.4 konvergiert $\int_a^x f_n'(t)dt$ gegen $\int_a^x \tilde{f}(t)dt$.
Damit gilt $f(x) \;=f(a) \;+ \int_a^x \tilde{f}(t)dt$. Mit Differentiation erhalten wir $f'(x) \;= \tilde{f}(x)$, vergleiche Satz 10.7. $\diamond$

Im Paragraphen 6 haben wir Potenzreihen eingeführt und untersucht. Im Paragraphen 7 (Korollar 7.6) haben wir die Stetigkeit einer Potenzreihe im Inneren des Konvergenzkreises hergeleitet, und zwar mittels eines Satzes über Majoranten, Satz 7.5. Zur Differentiation von Potenzreihen benötigen wir ein Resultat zur gleichmäßigen Konvergenz, um Satz 11.6 anwenden zu können.

Satz 11.7 *Sei M eine Menge, $f_k : M \to \mathbb{K}$ beschränkte Funktionen mit $\|f_k\|_M := \sup\limits_{x\in M} |f_k(x)|$. Es gelte*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_M \;< \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig (und absolut) auf M gegen eine beschränkte Funktion $f : M \to \mathbb{K}$ mit $\|f\|_M \;\le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_M$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 7.5 gilt: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist für jedes $x \in M$ wohldefiniert, die Reihe konvergiert absolut in jedem $x \in M$, und es gilt

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_M,$$

also $\|f\|_M \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_M$.

Bleibt die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen. Bezeichne die n-te Partialsumme

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_M < \epsilon$ für alle $n \ge N$. Für alle $x \in M$ und $n \ge N$ gilt dann

$$|S_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_M < \epsilon,$$

d.h. die S_n konvergieren gleichmäßig gegen f. ◇

Korollar 11.8 *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$. *Sei* $0 < \varrho < R$. *Dann konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig (und absolut) auf* $K_\varrho(0)$. *Die Potenzreihe* $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$ *konvergiert ebenfalls gleichmäßig (und absolut) auf* $K_\varrho(0)$. *Insbesondere gilt für die Funktion* $f :]-R, R[\to \mathbb{K}$, $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *folgendes: Die Ableitung ist für* $x \in]-R, R[$ *gleich*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$

Mehr noch, f *ist beliebig oft differenzierbar auf* $]-R, R[$ *, und es gilt für* $n \in \mathbb{N}$, $x \in]-R, R[$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)\, c_k x^{k-n}.$$

(Ist f' *in einem Punkt* x *differenzierbar, so heißt* $f''(x) = (f')'(x)$ *die zweite Ableitung von* f *in* x. *Allgemein bezeichnet, falls sie existiert,* $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x)$ *die* k*-te Ableitung. Man schreibt auch* $f^{(k)}(x) = \dfrac{d^k f}{dx^k}(x)$.*)*

Beweis. Bezeichne $f_k(z) = c_k z^k$, $z \in K_\varrho(0)$. Es gilt für $|z| \le \varrho$

$$|f_k(z)| = |c_k z^k| = |c_k \varrho^k| \frac{|z^k|}{\varrho^k} \le |c_k \varrho^k|,$$

d.h. $\|f_k\|_{K_\varrho(0)} \leq |c_k \varrho^k|$.

Da $\varrho < R$ ist, konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \varrho^k$ absolut, und mit Satz 11.7 folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ auf $K_\varrho(0)$.

Da $\sqrt[k]{k} \to 1$, folgt $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|c_k|} = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = R$. Mit der gleichen Argumentation wie eben erhält man, daß auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$ gleichmäßig auf $K_\varrho(0)$ konvergiert.

Für die Aussagen zu den Ableitungen wähle zu $x \in \,]-R, R[$ ein $\varrho > 0$ mit $|x| < \varrho < R$. Man wende nun Satz 11.6 an, und zwar auf die Partialsummen $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$, $x \in [-\varrho, \varrho]$. So erhält man die Behauptung zu f'. Durch Wiederholung der Beweisführung folgt auch die Behauptung zu f'' und allgemein $f^{(k)}$. $\diamond$

Bemerkung: Korollar 11.8 beinhaltet speziell

$$f^{(n)}(0) = n!\, c_n \qquad n \in \mathbb{N}_0 \qquad (*)$$

(Konvention: $f^{(0)} := f$). Diese Formel ist bemerkenswert: Man erhält die Koeffizienten der Potenzreihe von f durch Ableitungen $f^{(k)}$ an einer einzigen Stelle. Umgekehrt lassen sich die Ableitungen an dieser Stelle direkt aus den Koeffizienten bestimmen.

Man beachte aber: Es gibt Funktionen f, die beliebig oft differenzierbar sind; bildet man jedoch die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ gemäß $(*)$, so konvergiert diese Reihe für kein $z \neq 0$. Das heißt insbesondere, daß diese Funktionen nicht in eine Potenzreihe entwickelt werden können (mit $R > 0$). Denn wäre $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit positivem Konvergenzradius, so gilt $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$, also $a_n = c_n$.

Wir wollen nun den Approximationssatz von Weierstraß herleiten. Dazu wählen wir einen konstruktiven Weg und betrachten das sog. **n-te Bernsteinpolynom** zu einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{K}$

$$B_n(t; f) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k\, (1-t)^{n-k}$$

Wir werden gleich zeigen: Ist $f \in C([0,1])$, so gilt mit $n \to \infty$

$$\| B_n(.; f) - f \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |B_n(t; f) - f(t)| \to 0.$$

Um dies zu zeigen, haben wir $B_n(t; f)$ für $f(t) = f_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, 2$ zu bestimmen. Mit der Binomialformel gilt

$$B_n(t, f_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k\, (1-t)^{n-k} = (t + (1-t))^n = 1 \tag{11.1}$$

und für $n \geq 1$

$$B_n(t, f_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} t^k\, (1-t)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^k\, (1-t)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^{k+1} (1-t)^{n-(k+1)} = t\,(t + (1-t))^{n-1} = t \tag{11.2}$$

(da $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$)

$$B_n(t, f_2) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \binom{n-1}{k} t^{k+1} (1-t)^{n-(k+1)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^{k+1} (1-t)^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\, t \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k}$$

$$= \frac{t}{n} + \frac{t(n-1)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} = \frac{t}{n} + \frac{t(n-1)}{n}\, t = \frac{t(1-t)}{n} + t^2 \tag{11.3}$$

Man beachte auch:

$$B_n(t, \lambda f) = \lambda B_n(t, f) \quad \text{und } B_n(t, f+g) = B_n(t, f) + B_n(t, g)$$

und

$$B_n(t, f) \leq B_n(t, g) \qquad \text{falls } f \leq g.$$

Satz 11.9 (Weierstraßscher Approximationssatz) *Sei $f \in C([a, b])$. Dann existiert eine Folge von Polynomen P_n derart, daß*

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n - f \|_\infty = 0 \qquad \textit{(gleichmäßige Konvergenz)}$$

Ist f reellwertig, so können die P_n reell gewählt werden. Für $a = 0$ und $b = 1$ kann man $P_n(t) = B_n(t, f)$ wählen.

Beweis. Wir können $[a, b] = [0, 1]$ annehmen. (Man transformiere $[a, b]$ auf $[0, 1]$ durch $\varphi(t) = \frac{t-a}{b-a}$.) Sei also $f \in C[0, 1])$, $f \neq 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ für alle $s, t \in [0, 1]$ mit $|s - t| < \sqrt{\delta}$.

Setze $\alpha := \frac{2 \| f \|_\infty}{\delta}$. Dann gilt

$$|f(s) - f(t)| \leq \epsilon + \alpha\,(s-t)^2 \qquad \text{für alle } s, t \in [0, 1] \tag{11.4}$$

Falls $|s - t| < \sqrt{\delta}$ gilt, folgt dies nach oben. Sonst ist

$$\epsilon + \alpha\,(s-t)^2 \geq \epsilon + \alpha\delta = \epsilon + 2 \| f \|_\infty > |f(s)| + |f(t)| \geq |f(s) - f(t)|.$$

Bezeichne $g_s(t) = (s - t)^2$. g_s ist stetig, und mit (11.4) gilt

$$-\epsilon - \alpha g_s \leq f(s) - f \leq \epsilon + \alpha g_s \tag{11.5}$$

für alle $s \in [0,1]$. Mit (11.5) folgt

$$-B_n(.\,,\epsilon + \alpha g_s) \;=\; B_n(.\,,-\alpha - \alpha g_s) \;\leq B_n(.\,,f(s) - f) \;\leq\; B_n(.,\epsilon + \alpha g_s)$$

und damit für alle $t \in [0,1]$

$$|f(s) - B_n(t,f)| \;\overset{(11.1)}{=}\; |B_n(t, f(s) - f)| \;\leq\; B_n(t, \epsilon + \alpha g_s)$$

$$\leq\; \epsilon \;+ \alpha B_n(t, g_s) \;\overset{(11.2),(11.3)}{=}\; \epsilon \;+\; \alpha s^2 \;- \alpha\, 2st \;+ \alpha \left(\frac{t(1-t)}{n} \;+ t^2 \right)$$

Setzt man $s = t$, so folgt

$$|f(t) - B_n(t,f)| \;\leq\; \epsilon \;+\; \alpha\, \frac{t(1-t)}{n} \;\leq\; \epsilon \;+\; \frac{\alpha}{n}$$

für alle $t \in [0,1]$. Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung, da $\epsilon > 0$ beliebig wählbar ist. $\diamond$

12 Spezielle Funktionsreihen

Wir wenden uns nun der Entwicklung von Funktionen in Reihen zu. Es handelt sich dabei um Taylorentwicklungen und Fourierentwicklungen, zwei grundsätzlich verschiedene Zugänge.

12.1 Taylor-Reihen

Satz 12.1 (Taylor)
(Brook Taylor, 1685-1731, Cambridge)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N}.$ $f^{(n-1)}$ *sei stetig auf* $[a,b]$ *und* $f^{(n)}(t)$ *existiere für* $t \in\,]a,b[$.
Ferner seien $c, x \in [a,b],\ c \neq x.$ *Dann existiert ein* ξ *zwischen* c *und* x*, so daß gilt*

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k \ + \ \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-c)^n$$

Beweis. Für $n = 1$ ist dies genau der Mittelwertsatz (Satz 9.11).
Bezeichne $T_{n-1}(t; f) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(t-c)^k$, und definiere M durch

$$f(x) \ = \ T_{n-1}(x; f) \ + \ M\,(x-c)^n,$$

(d.h. $M \ = \dfrac{f(x) - T_{n-1}(x, f)}{(x-c)^n}$). Wir haben zu zeigen: $n!M \ = f^{(n)}(\xi)$ für ein $\xi \in\,]c, x[$ bzw. $\xi \in\,]x, c[$)

Betrachte $g(t) := \ f(t) \ - T_{n-1}(t; f) \ - M\,(x-c)^n$.

Da $T_{n-1}(.\,; f)$ ein Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades ist, folgt

$$g^{(n)}(t) \ = \ f^{(n)}(t) \ - \ n!\,M \qquad\qquad \text{für alle } t \in\,]a,b[$$

Somit ist nur zu zeigen: Es gibt ein ξ zwischen x und c mit $g^{(n)}(\xi) \ = 0$.

Nun gilt $T_{n-1}^{(k)}(c; f) \ = f^{(k)}(c)$ für $k = 0, .., n-1$, also $g^{(k)}(c) \ = 0$ für $k = 0, ..., n-1$.

Nun ist $g(x) = 0$ (nach der Wahl von M). Mit dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_1 \in\,]c, x[$ (bzw. $x_1 \in\,]x, c[$) mit $g'(x_1) = 0$.
Mit dem Paar c, x_1 folgt analog, daß ein $x_2 \in\,]c, x_1[$ (bzw. $x_2 \in\,]x_1, c[$) existiert mit $g''(x_2) = 0$. Nach n Schritten kommt man zu einem $x_n \in\,]c, x_{n-1}[$ (bzw. $x_n \in\,]x_{n-1}, c[$) mit $g^{(n)}(x_n) = 0$. Nun setze $\xi = x_n$. $\diamond$

Bemerkung: Der Taylorsche Satz 12.1 zeigt, daß f durch ein Polynom vom Grad $n-1$ approximiert werden kann mit einer möglichen Fehlerabschätzung gemäß der Formel im Satz. Dazu hat man eine Schranke für $|f^{(n)}|$ zu kennen.

Das Restglied $R_n(x) := \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-c)^n$ aus Satz 12.1 nennt man Lagrange-Restglied (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813, Berlin, Paris).

Die Polynome

$$T_{n-1}(t,f) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(t-c)^k$$

nennt man Taylor-Polynome mit Entwicklungspunkt c.

Ist f beliebig oft differenzierbar, so heißt

$$T_f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(t-c)^k$$

Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt c.

Ob die Taylor-Reihe von f auch f darstellt, kann nur über Abschätzung der Restglieder erfolgen.

Es gibt weitere Darstellungen des Restgliedes (Cauchy, Schlömilch), siehe Übungsaufgaben. Verschärft man etwas die Voraussetzung an f, so erhält man ein Restglied in Integralform.

Satz 12.2 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. f sei n-mal stetig differenzierbar. Ferner seien $c, x \in [a,b]$, $c \neq x$. Dann gilt*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k \;+\; \frac{1}{(n-1)!}\int_c^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$

Beweis. Bezeichne

$$R_n(t) := f(t) \;-\; T_{n-1}(t,f).$$

R_n ist n-mal stetig differenzierbar, und es gilt $R_n^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$.
Mit $T_{n-1}^{(k)}(c;f) = f^{(k)}(c)$ für $k = 0, ..., n-1$ gilt desweiteren $R_n^{(k)}(c) = 0$ für $k = 0, ..., n-1$. Mit partieller Integration folgt

$$\int_c^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \;=\; \int_c^x (x-t)^{n-1} R_n^{(n)}(t)\,dt$$

$$= \; (x-t)^{n-1} R_n^{(n-1)}(t)\Big|_{t=c}^{x} \;+\; (n-1)\int_c^x (x-t)^{n-2} R_n^{(n-1)}(t)\,dt$$

$$= \; (n-1)\int_c^x (x-t)^{n-2} R_n^{(n-1)}(t)\,dt$$

Wiederholung der partiellen Integration führt schließlich zu

$$(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \int_c^x (x-t)^0 R_n'(t)\,dt \;=\; (n-1)!\,(R_n(x) - R_n(c)) \;=\; (n-1)!\,R_n(x).$$

$\diamond$

Beispiele:

(1) Sei $f(t) = \exp(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Mit $c = 0$ gilt für jedes feste $x \neq 0$ (da $f^{(k)}(0) = 1$) :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n \right| \leq \frac{e^{|x|}|x|^n}{n!}$$

(für ein ξ zwischen 0 und x).

Damit kann man leicht zeigen, daß e nicht rational ist.

Annahme: $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Damit ist $q!e \in \mathbb{N}$ und $\alpha := q!\,(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{q!}) \in \mathbb{N}$. Mit der Restgliedabschätzung folgt aber $0 < \alpha = q!R_{q+1}(1) \leq \frac{eq!}{(q+1)!} = \frac{e}{q+1} < 1$, ein Widerspruch.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Wir zeigen, daß f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(n)}(0) = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Damit ist die Taylorreihe von f um den Nullpunkt identisch 0, obwohl f ungleich der Nullfunktion ist.)

Wir zeigen sogar:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases},$$

wobei p_n ein Polynom ist. Dies beweisen wir mit Induktion.

Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Gelte die Behauptung für n. Für $x \neq 0$ gilt

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left[-p_n'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} + 2p_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^3}\right]$$

Setze $p_{n+1}(t) = -p_n'(t)\,t^2 + 2p_n(t)\,t^3$.

Für $x = 0$ hat man

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{p_n\left(\frac{1}{t}\right) \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{t} = 0$$

(vgl. T35a), Blatt 12).

Häufig berechnet man Taylor-Reihen durch Umformung bekannter Reihen. Wir benötigen hierzu ein Ergebnis über Umstellungen in der Reihenfolge der Summation. (Ein Nachweis ähnlich dem Umordnungssatz Z21, Blatt 9 wäre möglich, aber sehr aufwendig).

Lemma 12.3 *Gegeben sei eine "Doppelfolge"* $(a_{ij})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ *von Zahlen* $a_{ij} \in \mathbb{K}$. *Es gelte* *(i)* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i$ *(absolute Konvergenz bei festem i)*

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *konvergiert.*

Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Bemerkung: Daß man die Summation im allgemeinen nicht einfach vertauschen darf, belegt folgendes Beispiel (Übung!)

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < j \\ -1 & \text{für } i = j \\ 2^{j-i} & \text{für } i > j \end{cases} \qquad \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{array}$$

Beweis. Sei M eine abzählbare Menge $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ von Punkten in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ (z.B. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $x_0 = 1$).
M ist mit der natürlichen Metrik ein metrischer Raum.

Wir definieren Funktionen $f_i : M \to \mathbb{K}$, $i \in \mathbb{N}$, durch $f_i(x_0) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ und $f_i(x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_i(x_n) = f_i(x_0)$, d.h. jedes f_i ist stetig in x_0.

Da $|f_i(x_0)| \le b_i$ und $|f_i(x_n)| \le b_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ gleichmäßig auf $M = \{x_0, x_1, ...\}$ gegen eine Grenzfunktion g, verwende Satz 11.7.

Mit Satz 11.2 ist $g : M \to \mathbb{K}$ in $x_0 \in M$ auch stetig. Das heißt aber nichts anderes als

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} (a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

(Man beachte $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i1} = g(x_1)$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i2} = g(x_2) - g(x_1)$ usw. Damit konvergieren die Spaltenreihen wegen Satz 11.7) ◇

Satz 12.4 *Sei* $f :]-R, R[\to \mathbb{K}$ *durch eine Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k, \qquad |x| < R$$

mit Konvergenzradius $R > 0$ definiert. Ist $c \in]-R, R[$, so gilt für $x \in]c-(R-|c|), c+(R-|c|)[\; = U_{R-|c|}(c)$

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k$$

(D.h. die Taylor-Reihe von f um c stellt in $U_{R-|c|}(c)$ die Funktion f dar.)

Beweis. Man hat für $x \in U_{R-|c|}(c)$

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,((x-c)+c)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\,(x-c)^j\,c^{k-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j}\,c_k\,c^{k-j} \right)\,(x-c)^j,$$

wobei die letzte Gleichung sich aus Lemma 12.3 ergibt, indem man setzt:

$$\begin{array}{llll} a_{kj} := & c_k \binom{k}{j}\,(x-c)^j\,c^{k-j} & j=0,...,k & \text{und} \\ a_{kj} := & 0 & j=k+1,k+2,... & \end{array}$$

Es gilt dabei:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \left| c_k \binom{k}{j}\,c^{k-j}\,(x-c)^j \right| \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\;(|x-c| \;+\; |c|)^k$$

und diese Reihe konvergiert, da $|x-c| \;+|c| \;< R$ gilt. Somit darf man die Reihenfolge der Summation vertauschen und erhält

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_{kj} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} a_{kj},$$

was genau obiger Gleichheit entspricht.

Bleibt noch festzustellen, daß mit der Formel aus Korollar 11.8 gilt

$$\frac{f^{(j)}(c)}{j!} \;=\; \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-j+1)\;c_k\;c^{k-j} \;=\; \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j}\,c_k\,c^{k-j}.$$

$\diamond$

Bemerkung: Der gerade hergeleitete Satz 12.4 gilt natürlich auch für $R = \infty$.

Im Beweis haben wir gezeigt, daß anschließende Transformationsformel gilt. Dabei lassen wir andere Mittelpunkte als Null zu. Das heißt, wir betrachten Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (z - z_0)^k, \qquad z_0 \in \mathbb{C}.$$

Mit Satz 6.13 gilt dann:
Es gibt genau ein R, so daß $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ absolut konvergiert für $z \in U_R(z_0)$ und divergiert für $z \in \mathbb{C} \backslash K_R(z_0)$. Man ersetze nur $u = z - z_0$. R heißt ebenfalls Konvergenzradius von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$. z_0 heißt Entwicklungspunkt.

Satz 12.5 *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ habe Konvergenzradius $R > 0$. Sei $z_1 \in U_R(z_0)$. Dann gilt für alle $z \in U_{R-|z_1-z_0|}(z_1)$ die Gleichung*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (z - z_0)^k \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} b_j \, (z - z_1)^j$$

mit

$$b_j \;=\; \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \, c_k \, (z_1 - z_0)^{k-j}$$

Beweis. Wie im Nachweis von Satz 12.4 folgt mit Lemma 12.3:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (z - z_0)^k \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, ((z - z_1) \;+\; (z_1 - z_0))^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \, (z - z_1)^j \, (z_1 - z_0)^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \, c_k \, (z_1 - z_0)^{k-j} \right) \, (z - z_1)^j .
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung beruht auf Lemma 12.3, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \left| c_k \binom{k}{j} \, (z_1 - z_0)^{k-j} \, (z - z_1)^j \right| \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \, \left(|z - z_1| \;+\; |z_1 - z_0|\right)^k$$

konvergiert, falls $|z - z_1| + |z_1 - z_0| < R$, d.h. $|z - z_1| < R - |z_1 - z_0|$. ◇

Wir wollen noch festhalten:

(1) $f(z) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \, (z - z_0)^k$, $(z_0 \in \mathbb{C})$, ist in $U_R(z_0)$ stetig (siehe Korollar 7.6).

(2) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-c)^k$, $(c \in \mathbb{R})$, ist in $]c-R, c+R[$ beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-n+1)\, c_k\,(x-c)^{k-n}$$

(siehe Korollar 11.8).

(3) Ist $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-c)^k$ durch seine Potenzreihe für alle $x \in\,]c-R, c+R[$ dargestellt $(R > 0)$, so ist die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt c genau die Potenzreihe. (Dies folgt direkt aus (2), denn es ist ja $f^{(n)}(c) = n!\, c_n$).

Insbesondere gilt folgender Identitätssatz:

Ist für $x \in\,]c-\varrho, c+\varrho[\,$, $\varrho > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k\,(x-c)^k,$$

so gilt $c_k = d_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Folgendes Beispiel soll Satz 12.4 ergänzen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < R = 1$$

Für $c = -\dfrac{1}{2}$ erhalten wir $\dfrac{f^{(k)}(-\frac{1}{2})}{k!} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}$, und somit

$$\frac{1}{1-x} = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \left(x+\frac{1}{2}\right)^k \qquad \text{für } x \in\,]-1, 0[$$

nach Satz 12.4.

Letztere Reihe hat aber Konvergenzradius $R = \frac{3}{2}$, konvergiert also für $x \in\,]-2, 1[\,$.

Ähnlich wie im Nachweis von Korollar 11.8 machen wir wegen $\sqrt[k]{k+1} \to 1$ folgende Beobachtung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}\,(z-z_0)^{k+1}$$

haben denselben Konvergenzradius R, und wie in Korollar 11.8 folgt:

(4) Ist $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-c)^k$ durch eine Potenzreihe für alle $x \in\,]c-R, c+R[$ $(R > 0)$ dargestellt, so ist

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}\,(x-c)^{k+1} \qquad \text{für alle } x \in\,]c-R, c+R[$$

eine Stammfunktion von f.

Beispiel: Wir wissen

$$\frac{1}{1+x} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, x^k \qquad\qquad \text{für } |x| \;< 1.$$

Da $\dfrac{d}{dx}\ln(1+x) \;=\; \dfrac{1}{1+x}$, folgt mit (4)

$$F(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, \frac{x^{k+1}}{k+1}, \qquad\qquad |x| \;< 1,$$

ist eine Stammfunktion von f, d.h. $\ln(1+x) \;= F(x) + c$ mit einer Konstante c. Setzt man $x = 0$, so folgt $c = 0$. Damit haben wir

$$\ln(1+x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad\qquad \text{für } |x| \;< 1$$

Mit dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe rechts auch für $x = 1$. Wenn wir wissen würden, daß diese Potenzreihe auch am Randpunkt $x = 1$ stetig ist (vgl. (1)), so hätten wir

$$\ln(2) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, \frac{1}{k+1} \;=\; 1 \;-\frac{1}{2} \;+\frac{1}{3} \;-\frac{1}{4} \;+ ...$$

Dazu hilft uns der sog. Abelsche Grenzwertsatz

Satz 12.6 *Es sei* $f(x) \;= \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-c)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$, $c \in \mathbb{R}$. *Auf dem Randpunkt* $x = c + R$ *sei die Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k R^k$ *auch konvergent. Dann ist*

$$\lim_{x\to(c+R)-} f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k.$$

Insbesondere ist $f:]c-R, c+R] \;\to \mathbb{K}, \quad f(x) \;= \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-c)^k$ *stetig.*

Beweis. Es bleibt die Stetigkeit auf dem Randpunkt $x = c + R$ nachzuweisen. Ersetzt man x durch $Ry + c$, so haben wir eine Potenzreihe um Null mit Konvergenzradius 1. Es reicht also, Potenzreihen $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $R = 1$ und konvergenter Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ zu betrachten.

Bezeichne $S_n \;= \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $S_{-1} = 0$.

$$\sum_{k=0}^{N} c_k x^k \;=\; \sum_{k=0}^{N}(S_k - S_{k-1})\, x^k \;=\; (1-x)\, \sum_{k=0}^{N-1} S_k x^k \;+\; S_N x^N$$

Für $|x| \;< 1$ folgt mit $N \to \infty$

$$f(x) \;=\; (1-x)\, \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k \qquad\qquad (*)$$

Bezeichne nun $S := \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|S - S_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Da auch $(1-x)\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1$ für $|x| < 1$ ist, erhalten wir aus $(*)$

$$|f(x) - S| = \left|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(S_k - S)\,x^k\right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{N}|S_k - S|\,|x^k| + \frac{\epsilon}{2}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}|x|^k$$

$$\leq (1-x)\sum_{k=0}^{N}|S_k - S| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Wähle nun $\delta > 0$, so daß für $1 - \delta < x < 1$ gilt

$$(1-x)\sum_{k=0}^{N}|S_k - S| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dann gilt $|f(x) - S| < \epsilon$ für $1 - \delta < x < 1$. Damit ist $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ gezeigt. $\diamond$

12.2 Fourier-Reihen

Fourier-Reihen eignen sich zur Analyse von Funktionen (z.B. Signale von denen man annimmt, daß sie eine Überlagerung von Grundschwingungsfunktionen (mit bestimmten Frequenzen) sind, d.h. von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ bzw. e^{ikx}. Dabei können diese Funktionen Sprungstellen haben (Pulsfunktionen).

Zunächst ist eine Vorbemerkung zu periodischen Funktionen angebracht. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ heißt **periodisch mit der Periode** $\omega > 0$, falls

$$f(x + \omega) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Es gilt dann auch $f(x + k\omega) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Wir werden im folgenden immer davon ausgehen, daß eine Funktion mit Periode 2π vorliegt, indem wir f durch eine Funktion g mit $g(x) := f\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\,x\right)$ ersetzen. Dann gilt

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{\omega}{2\pi}\,x + \omega\right) = f\left(\frac{\omega}{2\pi}\,x\right) = g(x).$$

Ein **trigonometrisches Polynom** ist eine Summe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{12.1}$$

$a_0, ..., a_n; b_1, ..., b_n \in \mathbb{K}$

Man kann mit $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$, $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ die Darstellung (12.1) auch schreiben als

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{+ikx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad (c_{-k}, ..., c_k \in \mathbb{K}) \tag{12.2}$$

Dabei ist

$$c_0 \;=\; \frac{a_0}{2}, \qquad c_k \;=\; \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k), \qquad c_{-k} \;=\; \frac{1}{2}\,(a_k + ib_k) \qquad\qquad \text{für } k \in \mathbb{N} \qquad (12.3)$$

Umgekehrt gilt natürlich

$$a_0 \;=\; 2c_0, \qquad a_k \;=\; c_k + c_{-k}, \qquad b_k \;=\; \frac{1}{i}\,(c_{-k} - c_k) \qquad\qquad k \in \mathbb{N} \qquad (12.4)$$

Wir bevorzugen die komplexe Darstellung (12.2). Kennt man das Polynom $f(x)$ von (12.2), so findet man die Koeffizienten $c_k \in \mathbb{K}$ durch

$$\int_0^{2\pi} f(x)\; e^{-imx} dx \;=\; \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k\; e^{ikx}\; e^{-imx} dx$$

$$=\; \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx \;=\; 2\pi\, c_m$$

für $m \in \{-n, ..., n\}$. Dabei benutzen wir eine wichtige Orthogonalitätseigenschaft der "doppelseitigen" Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von Funktionen $e_k(x) := e^{ikx}, \;\; x \in [0, 2\pi]$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_k(x)\; \overline{e_m(x)}\; dx \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m, \end{cases}$$

denn

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx \;=\; \frac{1}{in}\; e^{inx} \Big|_{x=0}^{2\pi} \;=\; 0 \qquad\qquad \text{für } n \neq 0.$$

Definition 12.7 *Sei* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{K}, \;\; f \in \mathcal{R}$ *mit* $f(0) \;=\; f(2\pi)$. *(Dafür schreiben wir kurz* $\mathcal{R}_p$*). Dann heißen die Zahlen*

$$\hat{f}(k) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\; e^{-ikx} dx, \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

die **Fourier-Koeffizienten** *von* f. *Die formale Reihe*

$$f(x) \;\sim\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\; e^{ikx}$$

heißt **Fourier-Reihe** *von* f.

Bemerkungen:

(1) Die Fourier-Reihe ist zunächst nur ein formales Gebilde. Es gibt zahlreiche Fälle, bei denen $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{-ikx}$ für kein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(2) Im folgenden werden wir die Konvergenz von $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$ verstehen (wenn nichts anderes angegeben) als

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx} \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx}.$$

(3) Für den Problemkreis "Fourier-Reihen" können wir 2π-periodische Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ und Funktionen $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{K}$, $f(0) = f(2\pi)$ als gleichwertig sehen. (Man setze f zu einer 2π-periodischen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ fort durch $g(x + 2\pi n) := f(x)$ für $x \in [0, 2\pi[\,$, $n \in \mathbb{Z}$).

Damit ist auch klar, daß die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}(k)$ durch

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} g(x)\, e^{-ikx}dx$$

gegeben sind.

Wir werden die 2π-periodische Fortsetzung auch mit f bezeichnen.

Wir errechnen ein Beispiel. Sei f folgende Pulsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, \pi] \cup \{2\pi\} \\ -1 & \text{für } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Es gilt $\hat{f}(0) = 0$ und für $k \neq 0$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-ikx}dx - \int_\pi^{2\pi} e^{-ikx}dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right|_{x=0}^{\pi} - \left.\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right|_{x=\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{i}{2\pi k}\left((e^{-ik\pi} - 1) - (1 - e^{-ik\pi})\right) = \frac{i}{2\pi k}\left(2e^{-ik\pi} - 2\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \dfrac{2i}{\pi k} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe zu $f(x)$ lautet $-\frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\, e^{i(2n+1)x}$, oder anders geschrieben

$$f(x) \sim -\frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\, e^{i(2n+1)x} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\, \sin(2n+1)x$$

Es ist aufschlußreich, Partialsummen $S_n f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$ für verschiedene N zu berechnen, um so die Approximation von $f(x)$ zu veranschaulichen.

Einige historische Anmerkungen:

Fourier (Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768-1830, Paris) behauptete, daß für jedes $f \in \mathcal{R}_p$ deren Fourier-Reihe gegen f strebt (Fourier-Reihen benutzte Fourier, um die Wärmeleitung in einem Körper zu beschreiben). Dies ist falsch.

Viele Mathematiker (auch Cauchy) haben dies mit falschem Beweis nachgewiesen. Erst Dirichlet brachte Ordnung in die Untersuchungen. Du Bois-Reymond (Paul Du Bois-Reymond, 1831-1889, Tübingen, Berlin) konnte zeigen: Es gibt eine stetige 2π-periodische Funktion mit $\lim\limits_{N\to\infty} S_n f(0) \ = \infty$.

Das stärkste Resultat stammt von Fejér (damals 19-jährig; Lipót Fejér, 1880-1959, Budapest). Er bewies, daß

$$\sigma_n(f)(t) \ = \ \sum_{k=-n}^{n} \left(1 \ - \ \frac{|k|}{n+1}\right) \ \hat{f}(k)\, e^{ikt} \ \to \ f(t), \qquad\qquad n \to \infty$$

falls f 2π-periodisch, stetig ist (sogar mit gleichmäßiger Konvergenz).

Wir zeigen als erstes wichtige Gleichheiten für gewisse trigonometrische Polynome.

Lemma 12.8 *(i)* $D_n(x) := \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ *(Dirichlet-Kern) erfüllt*

$$D_n(x) \ = \ 1 \ + \ 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx \ = \ \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (x \neq 0); \qquad D_n(0) \ = 2n+1$$

(ii) $F_n(x) := \sum\limits_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$ *(Fejér-Kern) erfüllt*

$$F_n(x) \ = \ 1 \ + \ 2\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \cos kx \ = \ \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}\, x}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2, \qquad (x \neq 0),$$

$$F_n(0) \ = n+1.$$

Ferner gilt $F_n(x) \ = \ \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} D_k(x)$.

Beweis. Man hat jeweils nur die zweite Identität zu zeigen. Sei $x \neq 0$.

(i)

$$D_n(x) \ = \ e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} \ = \ e^{-inx} \ \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

$$= \ e^{-inx} \ \frac{e^{i(2n+1)\,\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \ \frac{e^{i(2n+1)\frac{x}{2}} \ - \ e^{-i(2n+1)\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} \ - \ e^{-i\frac{x}{2}}} \ = \ \frac{\sin\left((2n+1)\ \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(ii) Daß $F_n(x)$ das arithmetische Mittel der $D_0(x), ..., D_n(x)$ ist, ist sofort einsichtig, da

$$F_n(x) \ = \ \frac{1}{n+1} \ \sum_{k=-n}^{n} ((n+1) \ - \ |k|)\, e^{ikx} \ = \ \frac{1}{n+1} \ \sum_{k=0}^{n} D_k(x)$$

Damit folgt mit (i)

$$\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \;(n{+}1)\; F_n(x) \;=\; \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \sum_{k=0}^n D_k(x) \;=\; \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{x}{2}\right)\; \sin\left((2k+1)\,\frac{x}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2}\;(\cos(kx)\;-\;\cos((k+1)x)) \;=\; \frac{1}{2}\;(1-\cos((n+1)x)) \;=\; \left(\sin\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)\right)^2.$$

◇

Wir bezeichnen im folgenden für $f \in \mathcal{R}_p$

$$S_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)\, e^{ikx} \tag{12.5}$$

und

$$\sigma_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\, \hat{f}(k)\, e^{ikx} \tag{12.6}$$

Das folgende Lemma gibt eine Integraldarstellung von $S_n(f)$ und $\sigma_n(f)$.

Lemma 12.9 *Sei $f \in \mathcal{R}_p$. Es gelten für $x \in \mathbb{R}$*

(i)

$$S_n(f)(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\; D_n(x-y)\; dy \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\; D_n(y)\; dy$$

(ii)

$$\sigma_n(f)(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) F_n(x-y)\; dy \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\; F_n(y)\; dy$$

und $\qquad \sigma_n(f) \;= \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^n S_k(f)$

Beweis.

(ii)

$$\sigma_n(f)(x) \;=\; \sum_{k=-n}^n \left(1 \;-\; \frac{|k|}{n+1}\right)\; \hat{f}(k)\; e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=-n}^n \left(1 \;-\; \frac{|k|}{n+1}\right)\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky} dy\; e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) \sum_{k=-n}^n \left(1 \;-\; \frac{|k|}{n+1}\right)\; e^{ik(x-y)} dy \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\; F_n(x-y)\; dy$$

Mit Variablensubstitution gilt auch $(t = x-y)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\, F_n(x-y)\; dy \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} f(x-t)\; F_n(t)\; dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-y)\; F_n(y)\; dy \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\; F_n(y)\; dy$$

Mit genau denselben Argumenten zeigt man auch (i). Mit $F_n(y) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(y)$ folgt $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$. ◇

Eigenschaften von F_n (bzw. D_n) führen dazu, daß $\sigma_n(f)$ gegen f (bzw. $S_n(f)$ nicht gegen f) konvergiert.

Lemma 12.10 *Es gelten:*

(i) $F_n(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_n(x)\,dx = 1$.

(iii) Für jedes $0 < \delta < \pi$ *gilt* $F_n(x) \to 0$ *gleichmäßig auf* $[\delta, 2\pi - \delta]$ *mit* $n \to \infty$.

Beweis.

(i) ist klar, da $F_n(x)$ das Quadrat einer reellen Zahl ist, siehe Lemma 12.8 (ii).

(ii)
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}dx \\ &= \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx = 1.\end{aligned}$$

(iii) Mit Lemma 12.8 (ii) gilt für $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$

$$F_n(x) \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 \to 0 \qquad \text{mit } n \to \infty$$

(unabhängig von x.)

◇

Satz 12.11 (Fejér) *Sei* $f \in \mathcal{R}_p$. *Ist* f *im Punkte* $x \in [0, 2\pi]$ *stetig, so gilt*

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)\,e^{ikx} \to f(x)$$

mit $n \to \infty$.

Beweis. Mit der Riemann-Integrierbarkeit ist f beschränkt. Sei $|f(y)| \le M$ für alle $y \in [0, 2\pi]$. Da f in x stetig ist, existiert zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für } |y - x| < \delta$$

Mit Lemma 12.10 (iii) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|F_n(y)| \le \frac{\epsilon}{4M} \qquad \text{für alle } y \in [\delta, 2\pi - \delta] \text{ und } n \ge N.$$

Ferner gilt mit Lemma 12.10 (i) und (ii)

$$\int_0^\delta |F_n(y)|\, dy + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} |F_n(y)|\, dy \le \int_0^{2\pi} |F_n(y)|\, dy = \int_0^{2\pi} F_n(y)\, dy = 2\pi$$

Mit diesen Eigenschaften erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, F_n(y)\, dy - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, F_n(y)\, dy \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (f(x-y) - f(x))\, F_n(y)\, dy \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta |f(x-y) - f(x)|\, F_n(y)\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^0 |f(x-y) - f(x)|\, F_n(y)\, dy \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} |f(x-y) - f(x)|\, F_n(y)\, dy \\
&\le \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2\pi} 2M \int_\delta^{2\pi-\delta} F_n(y)\, dy \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{2\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{\epsilon}{4M}\, dy \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{falls } n \ge N.
\end{aligned}$$

◇

Satz 12.12 (Fejér) *Sei $f \in \mathcal{R}_p$ stetig. Dann gilt*

$$\sigma_n(f) \to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } [0, 2\pi] \quad \textit{mit } n \to \infty$$

Beweis. Da $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{K}$ sogar gleichmäßig stetig ist, hat man zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für } |y - x| < \delta, \quad x, y \in [0, 2\pi]$$

(δ hängt nur von ϵ ab). Nun gehe man exakt wie im Nachweis von Satz 12.11 vor. ◇

Wir erhalten daraus folgende wichtigen Sachverhalte.

Korollar 12.13 (Weierstraßscher Approximationssatz) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ 2π-periodisch und stetig. Dann existiert eine Folge trigonometrischer Polynome P_n derart, daß*

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n - f \|_\infty = 0 \qquad \textit{gilt. (Gleichmäßige Konvergenz auf } \mathbb{R}).$$

Beweis. Wähle $P_n = \sigma_n(f)$. $\diamond$

Korollar 12.14 (Eindeutigkeitssatz) *Seien $f, g \in \mathcal{R}_p$ stetig. Gilt $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so ist $f = g$.*

Beweis. Mit der Voraussetzung gilt $\sigma_n(f) = \sigma_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit satz 12.12 folgt $f = g$. $\diamond$

Korollar 12.15 (Riemann-Lebesgue-Lemma) *Ist $f \in \mathcal{R}_p$ stetig, so gilt* $\lim\limits_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Mit Korollar 12.13 existiert ein trigonometrisches Polynom $P(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$ mit $\| f - P \|_\infty < \epsilon$.

Für $|n| > N$ gilt $\hat{P}(n) = 0$, also

$$|\hat{f}(n)| = |\hat{f}(n) - \hat{P}(n)| = |\widehat{f - P}(n)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (f(x) - P(x))\, e^{-inx}\, dx \right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - P(x)|\, dx < \epsilon$$

$\diamond$

Die Koeffizienten des Dirichlet-Kern bzw. des Fejér-Kern stammen von folgenden Funktionen:

Mit einer weiteren Summationsmethode, die zwischen diesen beiden liegt, erhalten wir Aussagen darüber, unter welchen Voraussetzungen an f die Fouriersummen $S_n(f)$ gegen f konvergieren. Diese Methode geht auf de la Vallée Poussin zurück. (Charles Jean Gustav Nicolas Baron de la Vallée Poussin, 1866-1962, Louvain (Belgien)).

Für $m, n \in \mathbb{N}_0,\ m > n$ definiere für $f \in \mathcal{R}_p$

$$\sigma_{n,m}(f) := \frac{1}{m-n} \left((m+1)\, \sigma_m(f) - (n+1)\, \sigma_n(f) \right)$$

$$= \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \frac{m+1-|k|}{m-n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} + S_n(f)(x) + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m+1-|k|}{m-n} \hat{f}(k)\, e^{ikx} \tag{12.7}$$

Man hat also folgende Form von Koeffizienten:

Lemma 12.16 *Sei $f \in \mathcal{R}_p$. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$.*

(i) Ist f in $x \in [0, 2\pi]$ stetig, so gilt:

$$\sigma_{kn,(k+1)n}(f)(x) \;\to\; f(x) \qquad\qquad \textit{mit } n \to \infty$$

(ii) Ist f stetig auf $[0, 2\pi]$, so gilt

$$\sigma_{kn,(k+1)n}(f) \;\to f \qquad \textit{gleichmäßig auf } [0, 2\pi] \textit{ mit } n \to \infty$$

(iii) Gilt $|\hat{f}(l)| \;\leq\; A\, \dfrac{1}{|l|}$ für alle $l \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mit einer Konstanten $A \geq 0$ (d.h. $\hat{f}(l) \overset{|l|\to\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{|l|}\right)$), so gilt

$$\left|\sigma_{kn,(k+1)n}(f)(x) \;-\; S_m(f)(x)\right| \;\leq\; 2A\, \frac{1}{k}$$

für alle $x \in [0, 2\pi]$ und $m \in \{kn, kn+1, ..., k(n+1)-1\}$.

Beweis.

(i) und (ii) Man beachte

$$\begin{aligned}\sigma_{kn,(k+1)n}(f)(x) \;&=\; \frac{1}{n}\, \Big(((k+1)\,n+1)\; \sigma_{(k+1)n}(f)(x) \;-\; (kn+1)\; \sigma_{kn}(f)(x)\Big) \\ &=\; \left(k+1\; + \frac{1}{n}\right)\, \sigma_{(k+1)n}(f)(x) \;-\; \left(k + \frac{1}{n}\right)\, \sigma_{kn}(f)(x) \\ &\longrightarrow\; (k+1)\; f(x) \;-\; kf(x) \;=\; f(x)\end{aligned}$$

falls f stetig in x (bzw. gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$, falls f stetig) mit Satz 12.11 (bzw. Satz 12.12).

(iii) Hierzu beachte man, daß mit (12.7) für $kn \;\leq m \;< k(n+1)-1$

$$\left|\sigma_{kn,(k+1)n}(f)(x) \;-\; S_m(f)(x)\right| \;\leq\; \sum_{kn \leq |l| \leq (k+1)n} |\hat{f}(l)|$$

$$\leq\; 2 \sum_{l=kn+1}^{(k+1)n} A\, \frac{1}{l} \;\leq\; 2An\, \frac{1}{kn} \;=\; 2A\, \frac{1}{k}.$$

$\diamond$

Satz 12.17 *Sei* $f \in \mathcal{R}_p$ *und* $\hat{f}(l) = O\left(\frac{1}{|l|}\right), \ |l| \to \infty$. *Dann gelten*

(i) Ist f *stetig in* $x \in [0, 2\pi]$, *so folgt* $S_n(f)(x) \to f(x)$ *mit* $n \to \infty$

(ii) Ist f *stetig auf* $[0, 2\pi]$, *so gilt* $S_n(f) \to f$ *gleichmäßig auf* $[0, 2\pi]$.

Beweis.

(i) Es existiert ein $A \geq 0$ mit $|\hat{f}(l)| \leq A \frac{1}{|l|}, \ l \neq 0$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2A}{k} < \frac{\epsilon}{2}$. Mit Lemma 12.16 (i) existiert $N \geq k$ mit

$$|\sigma_{kn,(k+1)n}(f)(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N$$

Sei nun $m \geq kN$. Dann existiert $n \geq N$ mit $(k+1)n > m \geq kn$ und mit Lemma 12.16 (iii) folgt

$$\begin{aligned} |S_m(f)(x) - f(x)| &\leq |S_m(f)(x) - \sigma_{kn,(k+1)n}(f)(x)| + |\sigma_{kn,(k+1)n}(f)(x) - f(x)| \\ &< 2A\,\frac{1}{k} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

(ii) Die gleichmäßige Konvergenz zeigt man analog mit Lemma 12.6 (ii).

$\diamond$

Eine hinreichende Bedingung für Funktionen mit $\hat{f}(l) = O\left(\frac{1}{|l|}\right), \ |l| \to \infty$ beinhaltet folgendes Resultat.

Lemma 12.18 *Sei* $f \in \mathcal{R}_p$ $(n-1)$*-mal stetig differenzierbar, so daß* $f^{(n-1)}$ *differenzierbar ist mit stetigen Ableitungen bis auf endlich viele Punkte* $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, 2\pi]$. *Gilt dann* $|f^{(n)}(x)| \leq M$ *für alle* $x \in [0, 2\pi] \backslash \{x_1, ..., x_n\}$, *so folgt* $|\hat{f}(l)| \leq M \frac{1}{|l|^n}$ *für alle* $l \neq 0$.

Beweis. Mit partieller Integration erhalten wir für $l \neq 0$: (Beachte: f ist stetig. Außerdem ist $f(0) = f(2\pi)$)

$$\hat{f}(l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ilx} dx = \frac{1}{2\pi}\ f(x) \frac{e^{-ilx}}{-il}\Bigg|_{x=0}^{2\pi} + \frac{1}{2\pi i l} \int_0^{2\pi} f'(x)\, e^{-ilx} dx = \frac{1}{il}\, \widehat{f'}(l)$$

(Beachte: $\widehat{f'}(l) \;= il\hat{f}(l),\; l \neq 0)$
Wiederholung der Differentiation führt zu

$$\hat{f}(l) \;=\; \frac{1}{2\pi(il)^n} \int_0^{2\pi} f^{(n)}(x)\, e^{-ilx} dx$$

Folglich

$$|\hat{f}(l)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi\,|l|^n} \int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|\, dx \;\leq\; \frac{M}{|l|^n}.$$

◇

Korollar 12.19 *Sei $f \in \mathcal{R}_p$ stetig und habe stetige beschränkte Ableitungen außer an endlich vielen Punkten. Dann gilt: $S_n(f) \to f$ gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$.*

Betrachten wir das Beispiel der Pulsfunktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,\pi] \,\cup\, \{2\pi\} \\ -1 & \text{für } x \in \,]\pi, 2\pi[\;, \end{cases}$$

so folgt mit Satz 12.17, daß $S_n f(x) \;\to f(x)$ für $x \neq \pi$. Insbesondere erhalten wir für $x = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \,\sin\left((2n+1)\,\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$
$$=\; 1 \;-\; \frac{1}{3} \;+\; \frac{1}{5} \;-\; ...$$

Bleibt zu untersuchen, was an den Unstetigkeitsstellen passiert.

Satz 12.20 *Sei $f \in \mathcal{R}_p$ mit $\hat{f}(l) \;= O\left(\dfrac{1}{|l|}\right)$, $|l| \;\to\; \infty$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Existieren $\lim\limits_{t \to x+0} f(t) \;=\; f(x+0)$ und $\lim\limits_{t \to x-0} f(t) \;=\; f(x-0)$, so gilt*

$$S_n(f)(x) \;\to\; \frac{1}{2}\,(f(x+0) + f(x-0)) \qquad \textit{mit } n \to \infty.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Behauptung für $x = 0$ $(x = 2\pi k,\; k \in \mathbb{Z})$.

Bezeichne $h(x) \;=\; \dfrac{x - \pi}{\pi}$ für $x \in [0, 2\pi[$, $h(2\pi) \;= -1$. Wir wissen (Blatt 9, Z22): $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(h)(x) \;= h(x)$ für $x \in \,]0, 2\pi[$.

Die Fourier-Koeffizienten dabei sind $\hat{h}(0) = 0,\; \hat{h}(k) \;= \dfrac{i}{\pi k}$.
Insbesondere gilt $S_n(h)(0) \;= 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten nun $g \in \mathcal{R}_p$, wobei

$$g(x) := \; f(x) \;+\; \frac{1}{2}\;(f(0+0) - f(0-0))\; h(x) \qquad \text{für } x \in \,]0, 2\pi[$$

$$g(0) := \frac{1}{2}\left(f(0+0) + f(0-0)\right) =: g(2\pi)$$

Es gilt

$$g(0-0) = f(0-0) + \frac{1}{2}\left(f(0+0) - f(0-0)\right) h(0-0)$$

$$= f(0-0) + \frac{1}{2}\left(f(0+0) - f(0-0)\right) \cdot 1 = \frac{1}{2}\left(f(0+0) + f(0-0)\right) = g(0)$$

und

$$g(0+0) = f(0+0) + \frac{1}{2}\left(f(0+0) - f(0-0)\right) \cdot (-1) = g(0)$$

Damit ist $g \in \mathcal{R}_p$ stetig überall und $\hat{g}(l) = \hat{f}(l) + \frac{1}{2}(f(0+0) - f(0-0))\hat{h}(l)$ d.h. $\hat{g}(l) = O\left(\frac{1}{|l|}\right)$ mit $l \to \infty$. Mit Satz 12.17 folgt

$$S_n(g)(x) \to g(0), \qquad \text{und mit}$$

$$S_n(f)(0) + \frac{1}{2}\left(f(0+0) - f(0-0)\right) S_n(h)(0) = S_n(g)(0)$$

folgt

$$S_n(f)(0) \to g(0) = \frac{1}{2}\left(f(0+0) + f(0-0)\right).$$

Der Fall für beliebiges $x \in [0, 2\pi]$ folgt aus dem gerade Bewiesenen, indem man statt f die Translation $T_{-x}f$ betrachtet. Da $T_{-x}f(y) = f(x+y)$ und $\widehat{T_{-x}f}(k) = e^{ixk}\hat{f}(k)$ folgt dann die Behauptung. $\diamond$

Bemerkung: Ist $f \in \mathcal{R}_p$ und existieren $f(x+0)$ und $f(x-0)$, so gilt $\sigma_n(f)(x) \to \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ mit $n \to \infty$. D.h. man benötigt für σ_n die zusätzliche Voraussetzung über das Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten nicht.

Den Nachweis der Existenz einer stetigen 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit $\limsup_{n\to\infty} |S_n(f)(0)| = \infty$ sei zurückgestellt. Wir wenden uns lieber der Approximation im quadratischen Mittel zu, bei der man immer erfolgreich und sogar optimal mit den $S_n(f)$ die Funktion f annähern kann. Wir untersuchen also den "Fehler im quadratischen Mittel",

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |S_n(f)(x) - f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \qquad \text{für } f \in \mathcal{R}_p.$$

Hierzu paßt das Skalarprodukt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx =: \langle f, g\rangle \qquad \text{für } f, g \in \mathcal{R}_p \text{ stetig.}$$

Wir setzen f, g stetig voraus, damit aus $\langle f, f\rangle = 0$ auch $f = 0$ folgt.

Wir erinnern an einige Sachverhalte für Prähilberträume (vgl. Lineare Algebra). Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum X mit einer Abbildung $\langle\, ,\, \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt **Prähilbertraum**, falls

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in X$ und $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$

(iii) $\langle x,y\rangle \;=\; \overline{\langle y,x\rangle}$

(iv) $\langle x+y,z\rangle \;=\; \langle x,z\rangle \;+\; \langle y,z\rangle$ für alle $x,y,z\in X,\;\; \lambda\in\mathbb{K}$

gilt. Eine Familie $\{x_i\,:\,i\in I\}$ heißt **orthonormal**, falls $\langle x_i,x_j\rangle = 0$ für $i\neq j$ und $\langle x_i,x_i\rangle = 1$ für alle $i,j\in I$.

Es gelten (siehe Lineare Algebra):

(1) (Satz von Pythagoras)
Sei $\{x_1,...,x_n\}$ eine endliche orthonormale Familie in einem Prähilbertraum X. Bezeichnet

$$\| \, x \, \| := \sqrt{\langle x,x\rangle} \qquad \text{für } x\in X,$$

so gilt

$$\| \, x \, \|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x,x_k\rangle|^2 + \; \| \, x \; - \; \sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle \; x_k \, \|^2$$

Aus dem Satz von Pythagoras folgen:

(2) (Bessel-Ungleichung)
Ist $\{x_1,...,x_n\}$ eine orthonormale Familie in einem Prähilbertraum X, so gilt für jedes $x\in X$

$$\| \, x \, \|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle x,x_k\rangle|^2$$

(3) (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
Ist X Prähilbertraum, $x,y\in X$, so folgt

$$|\langle x,y\rangle| \;\leq \| \, x \, \| \, \| \, y \, \| \, .$$

Damit hat man folgenden Sachverhalt:
Gilt $x_n\to x$ in X mit $n\to\infty$, so gilt für alle $y\in X$: $\langle x_n,y\rangle \;\to \langle x,y\rangle$ mit $n\to\infty$.
$(|\langle x_n,y\rangle \;-\; \langle x,y\rangle| \;=\; |\langle x_n - x,y\rangle| \;\leq \| \, x_n - x \, \| \, \| \, y \, \|)$.

(4) $\| \, x \, \| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ ist eine Norm auf X. (Ist X mit dieser Norm vollständig, so nennt man X einen Hilbertraum).

Man prüft leicht nach, daß $C_p := \;\{f\in\mathcal{R}_p :\; f \text{ stetig }\}$ mit

$$\langle f,g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

ein Prähilbertraum ist. Wir wissen bereits, daß $\{e_n\,:\,n\in\mathbb{Z}\}$, $e_n(x) = e^{inx}$ eine orthonormale Familie in C_p bildet. Mit $\| \, f \, \|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}$ ist C_p ein normierter Raum. Mit Obigem gilt:

Satz 12.21 (Bessel-Ungleichung) *Für $f \in C_p$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \;\geq\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

Insbesondere konvergiert $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$.

Beweis. Beachte, daß

$$\langle f, e_k\rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{e_k(x)}\, dx \;= \hat{f}(k)$$

und benutze die "abstrakte" Bessel-Ungleichung (2). ◇

Bemerkung: Wir werden in Kürze sehen, daß in Satz 12.21 sogar Gleichheit gilt.

Ein weiterer Sachverhalt gilt in allen Prähilberträumen.

Satz 12.22 *Sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine endliche orthonormale Familie in einem Prähilbertraum X, und $x \in X$. Bezeichne*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n}\langle x, x_k\rangle\, x_k \qquad \textit{und} \qquad t_n := \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$$

Dann gilt:

$$\| \, x - t_n \, \| \geq \| \, x - s_n \, \| = \left(\| \, x \, \|^2 \; - \; \sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \right)^{1/2},$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, falls $\lambda_k = \langle x, x_k\rangle$ für alle $k = 1, ..., n$.

(Damit ist also s_n diejenige Approximation aus dem linearen Erzeugnis von $\{x_1, ..., x_n\}$ mit dem geringsten Abstand zu x.)

Beweis.

$$\| \, x - t_n \, \|^2 = \; \langle x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \; x - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\rangle$$

$$= \; \langle x, x\rangle \; - \; \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\langle x_k, x\rangle \; - \; \sum_{k=1}^{n}\overline{\lambda_k}\,\langle x, x_k\rangle \; - \; \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{\lambda_k}$$

$$= \; \langle x, x\rangle \; - \; \sum_{k=1}^{n}\langle x, x_k\rangle\,\overline{\langle x, x_k\rangle} \; + \; \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \langle x, x_k\rangle)\,\overline{(\lambda_k - \langle x, x_k\rangle)}$$

$$= \; \langle x, x\rangle \; - \; \sum_{k=1}^{n}|\langle x, x_k\rangle|^2 \; + \; \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k - \langle x, x_k\rangle|^2$$

$$\geq \| \, x \, \|^2 \; - \; \sum_{k=1}^{n}|\langle x, x_k\rangle|^2 \; = \| \, x - s_n \, \|^2,$$

wobei die letzte Gleichung exakt der Satz von Pythagoras (1) ist. Die Zusatzaussage ist mit Obigem offensichtlich. ◇

Korollar 12.23 *Sei $f \in C_p$. Unter allen trigonometrischen Polynomen der Form $\sum\limits_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{ikx}$ ist $S_n(f)$ die beste Approximation im quadratischen Mittel. Für den Fehler gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left| f(x) \ - \ \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e^{ikx}\right|^2 dx \ \geq \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \ - \ \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2.$$

Hat man in einem Prähilbertraum X eine orthonormale Familie $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, so gilt im allgemeinen noch nicht

$$x \ = \ \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, x_k\rangle \, x_k \ = \ \lim_{n\to\infty} s_n \qquad\qquad (*)$$

für $x \in X$. Gilt $(*)$ für alle $x \in X$, so heißt $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine **Orthonormalbasis** von X.

Wir werden jetzt zeigen, daß $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$, $e_k(x) = e^{ikx}$ eine Orthonormalbasis in C_p bildet.

Satz 12.24 *Seien $f, g \in C_p$. Dann gelten:*

(a) $\| f - S_n(f) \|_2 \to 0 \qquad$ *mit* $n \to \infty$

(b) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \ = \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$ *(Parsevalsche Gleichung)*

(c) $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \ = \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\,\overline{\hat{g}(k)}$

Beweis.

(a) Sei $\epsilon > 0$. Mit dem Satz von Fejér (Satz 12.12) gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - \sigma_n(f)(x)| < \epsilon$ für alle $x \in [0, 2\pi]$ und $n \geq N$. Damit gilt auch

$$\| f - \sigma_n(f) \|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) \ - \sigma_n(f)(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. Mit Korollar 12.23 haben wir

$$\| f - S_n(f) \|_2 \ \leq \ \| f - \sigma_n(f) \|_2 \ < \epsilon$$

für alle $n \geq N$.

(b) Es gilt mit dem Satz von Pythagoras (1):

$$\| f - S_n(f) \|_2^2 = \| f \|_2^2 \ - \ \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \ \geq 0$$

Mit (a) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \ = \| f \|_2^2$, und dies ist die Parsevalsche Gleichung.

(c) Mit der Stetigkeitsaussage zur Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt (unter Nutzung von (a))

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle S_n(f),g\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\ \langle e_k,g\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\ \overline{\hat{g}(k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\ \overline{\hat{g}(k)}.\end{aligned}$$

$\diamond$

Bemerkung: Man kann zeigen, daß die drei Bedingungen (a), (b) und (c) äquivalent sind.

Zum Abschluß erwähnen wir noch, daß analoge Resultate gelten für den Prähilbertraum $C([a,b])$ mit Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_\alpha := \int_a^b f(x)\ \overline{g(x)}\ d\alpha(x),$$

wobei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion ist und im Skalarprodukt das zugehörige Riemann-Stieltjes-Integral benutzt wird. Oftmals ist $d\alpha(x) = w(x)dx$, $w : [a,b] \to [0,\infty[$. Beachte $C([a,b]) \subseteq \mathcal{R}(\alpha)$.
Man braucht eine Orthonormalbasis bezgl. dieses Skalarprodukts. Dies geht mit der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung der Funktionen $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$. (siehe Lineare Algebra). Hat man die orthonormalen Polynome $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), ...\}$ gefunden mit

$$\langle P_n, P_m\rangle_\alpha = \int_a^b P_n(x)\ P_m(x)\ d\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

(Beachte: $P_n(x) \in \mathbb{R}$, grad $P_n = n$ da α streng monoton wachsend)
und nimmt man die Konvergenz bzgl. $\| f \|_{2,\alpha} = \sqrt{\langle f,f\rangle_\alpha}$, so gelten die analogen Aussagen aus Korollar 12.23 und Satz 12.24 (im Nachweis von Satz 12.24(a) hat man Satz 11.9 zu benutzen (Bernstein-Polynome). Den Ersatz für den Fourier-Koeffizienten $\hat{f}(k) = \langle f, c_k\rangle$ bilden die Skalarprodukte $\langle f, P_n\rangle_\alpha$). Für die Bestimmung der orthonormalen Polynome ist folgendes Resultat (Drei-Term Rekursion) wichtig.

Satz 12.25 *Seien $P_0(x), P_1(x), P_2(x), ...$ orthonormale Polynome bzgl. des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$. Dann gilt*

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)\ P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$P_0(x)$ konstante Funktion, $P_1(x)$ reelle, lineare Funktion. Dabei sind $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\mathcal{P}_n = \text{Lin.Erz.}\{P_0, P_1, ..., P_n\}$. Dann gilt $\langle P_n, g\rangle_\alpha = 0$ für alle $g \in \mathcal{P}_{n-1}$ und $P_n \in \mathcal{P}_n \backslash \mathcal{P}_{n-1}$. Insbesondere gilt $xP_n(x) \in \mathcal{P}_{n+1}$, d.h. $xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k P_k(x)$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $\gamma_{n+1} \neq 0$.
Dann gilt für $0 \leq j \leq n+1$

$$\langle xP_n(x), P_j(x)\rangle_\alpha = \langle\sum_{k=0}^{n+1}\gamma_k P_k(x), P_j(x)\rangle_\alpha = \gamma_j \| P_j \|_{2,\alpha} = \gamma_j$$

Für $0 \leq j \leq n-2$ ist aber $xP_j(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$, also

$$\gamma_j \;=\; \langle xP_n(x), P_j(x)\rangle_\alpha \;=\; \langle P_n(x), xP_j(x)\rangle_\alpha \;= 0$$

D.h.

$$xP_n(x) \;=\; \gamma_{n-1}P_{n-1}(x) \;+\; \gamma_n P_n(x) \;+ \gamma_{n+1}P_{n+1}(x)$$

Mit $a_n \;=\; \dfrac{1}{\gamma_{n+1}}$, $\quad b_n \;=\; -\dfrac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}$, $\quad c_n \;=\; -\dfrac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n+1}}$ haben wir die Behauptung. $\diamond$

Beispiele:

(1) Chebyshev-Polynome 1. Art

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad\qquad \text{(Übung)}$$

(2) Legendre Polynome

$$\langle f, g\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx \qquad\qquad \text{(Übung)}$$

13 Differentiation im Mehrdimensionalen

Ableitungen von Abbildungen $f : U \to U'$ in Punkten x_0 einer offenen Menge U eines normierten Vektorraums V endlicher Dimension in eine offene Menge U' eines weiteren endlichdimensionalen normierten Vektorraums W werden erklärt als lineare Approximationen $L : V \to W$ mit

$$f(x) \;=\; f(x_0) \;+\; L\,(x - x_0) \;+ R(x),$$

wenn die Restfunktion R schneller gegen 0_W konvergiert für $x \to x_0$ als die Norm $\| \, x - x_0 \, \|$, also wenn gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{\| \, x - x_0 \, \|} \; R(x) \;= 0.$$

13.1 Stetige lineare Abbildungen

Unter "Vektorraum" wird in diesem Teil stets ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ verstanden.

Satz 13.1 *Für eine lineare Abbildung L eines normierten Vektorraums V in einen normierten Vektorraum W sind je zwei der folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) Die Abbildung L ist gleichmäßig stetig auf V.

(ii) Die Abbildung L ist stetig im Nullpunkt 0_V von V.

(iii) Die Menge $\{\| \, Lx \, \|_W\colon \; x \in V, \; \| \, x \, \|_V \leq 1\}$ ist beschränkt.

Beweis. Der Schluß $(i) \to (ii)$ ist selbstverständlich.

$(ii) \to (iii)$ (indirekter Beweis):

Angenommen, die Menge unter (iii) sei unbeschränkt. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in V$ mit $\| \, x_n \, \| \leq 1$ und $\| \, Lx_n \, \| \geq n$. Für $y_n := \dfrac{1}{n} \, x_n$ gilt dann $\| \, y_n \, \| = \dfrac{1}{n} \, \| \, x_n \, \| \leq \dfrac{1}{n}$ und $\| \, Ly_n \, \| = \dfrac{1}{n} \, \| \, Lx_n \, \| \geq 1$. Da für alle linearen Abbildungen $L : V \to W$ gilt $L\,0_V = 0_W$, folgt wegen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0_V$, daß L in 0_V unstetig ist.

$(iii) \to (i)$:

Nach Voraussetzung ist $M := \sup\{\| \, Lx \, \|\colon \; x \in V, \; \| \, x \, \| \leq 1\}$ endlich. Damit gilt

$$\| \, Lx \; - Ly \, \| \leq \; M \;\; \| \, x - y \, \| \qquad\qquad \text{für alle } x, y \in V. \qquad (*)$$

Wenn dies gezeigt ist, hat man die gleichmäßige Stetigkeit von L auf V.
Zum Beweis von $(*)$ braucht nur der Fall $x \neq y$ betrachtet zu werden. Dann ist $\| \, x - y \, \| > 0$ und $z := \| \, x - y \, \|^{-1} \; (x - y)$ hat Norm 1. Also gilt $\| \, Lz \, \| \leq M$ und somit $\| \, x - y \, \|^{-1} \, \| \, L(x - y) \, \| \leq M$. ◇

Definition 13.2 *Zu jeder stetigen linearen Abbildung* $L : V \to W$ *normierter Vektorräume wird die* **Operatornorm** *definiert durch*

$$\| L \| := \sup\{\| Lx \|_W : \ x \in V, \ \| x \|_V \leq 1\}.$$

Satz 13.3 *Die Menge* $\mathcal{L}(V, W)$ *aller stetigen linearen Abbildungen* $L : V \to W$ *des normierten Raumes* V *in den normierten Raum* W *bildet unter der Operatornorm ebenfalls einen normierten Vektorraum.*

Beweis.

(1) Nach Überlegungen der Linearen Algebra bildet die Gesamtheit der linearen Abbildungen $f : V \to W$ (unter punktweiser Addition und Skalarmultiplikation) einen Vektorraum (im üblichen Sinn). Aus Kriterium (ii) von Satz 13.1 sieht man, daß die Teilmenge $\mathcal{L}(V, W)$ ein Unterraum ist.

(2) Nachweis von (N1), (N2), (N3) für die Operator-Norm.
$\| L \| = 0$ bedeutet $Lx = 0_V$ für alle $x \in V$ mit $\| x \|_V \leq 1$, bedeutet also $Lx = 0_V$ für alle $x \in V$. Daher ist $L = 0_{V,W}$, die Null in $\mathcal{L}(V, W)$. Dies beweist (N1).

Für nichtleere, beschränkte Mengen $B \subset \mathbb{R}$ und $r \geq 0$ gilt bekanntlich $\sup(rB) = r \sup B$. Dies liefert für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathcal{L}(V, W)$ stets $\| \lambda L \| = |\lambda| \ \| L \|$; das zeigt die Gültigkeit von (N2). Schließlich folgt für $L, L' \in \mathcal{L}(V, W)$ und $x \in V$ stets

$$\| (L + L')x \|_W = \| Lx + L'x \|_W \leq \| Lx \|_W + \| L'x \|_W$$

Dies ergibt $\| (L + L')x \|_W \leq \| L \| + \| L' \|$ für $x \in V$ mit $\| x \|_V \leq 1$.
Somit folgt $\| (L + L') \| \leq \| L \| + \| L' \|$, d.h. (N3).

◇

Bemerkungen:

(1) Die Operatornorm ergibt die Abschätzung

$$\| Lx \|_W \leq \| L \| \| x \|_V \qquad \text{für alle } L \in \mathcal{L}(V, W), \quad x \in V.$$

(2) Im Fall $V = W$ schreibt man $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$ und nennt $L \in \mathcal{L}(V)$ einen stetigen Endomorphismus von V. Mit $L, L' \in \mathcal{L}(V)$ liegt auch das (durch Abbildungskomposition $L \circ L'$ erklärte) Produkt LL' in $\mathcal{L}(V)$. Die Abschätzung $\| LL'x \|_{V=W} \leq \| L \| \cdot \| L'x \|_{V=W} \leq \| L \| \cdot \| L' \| \| x \|_V$ ergibt generell

$$\| LL' \| \leq \| L \| \| L' \| \qquad \text{für alle } L, L' \in \mathcal{L}(V)$$

(Submultiplikativität der Operatornorm)

Definition 13.4 *Zwei Normen* $\| \cdot \|, \| \cdot \|'$ *auf dem Vektorraum* V *heißen* **äquivalent**, *wenn es Schranken* $M > 0, M' > 0$ *gibt mit*

$$\| x \| \leq M \| x \|' \qquad \textit{und} \ \| x \|' \leq M' \| x \| \qquad \textit{für alle } x \in V.$$

Satz 13.5 *(i) Zwei Normen eines Vektorraums* V *sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselben Cauchy-Folgen besitzen.*

(ii) Äquivalente Normen auf V *haben dieselben offenen Mengen.*

Beweis.

(i) Sind $\| \cdot \|, \| \cdot \|'$ äquivalente Normen auf V, dann gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf V für alle Indices $m, p \in \mathbb{N}$

$$\| x_{m+p} - x_n \| \leq M \| x_{m+p} - x_m \|' \ \text{ und } \ \| x_{m+p} - x_m \|' \leq M' \| x_{m+p} - x_m \|$$

Daher ist eine Cauchyfolge in der einen Norm zugleich Cauchyfolge in der anderen Norm.
Sind aber die Normen $\| \cdot \|, \| \cdot \|'$ nicht äquivalent, dann existiert wenigstens eine der Schranken M, M' nicht. Wenn etwa kein M' existiert im Sinne der Definition, dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in V$ mit $\| x_n \| \leq 1, \quad \| x_n \|' \geq n^2$. Setzt man $y_n = \frac{1}{n} x_n$, so wird $\| y_n \| \geq \frac{1}{n}$, also $\lim_{n\to\infty} y_n \to 0_V$ bzgl. $\| \cdot \|$, aber wegen $\| y_n \|' \geq n$ ist bzgl. $\| \cdot \|'$ die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge, weil sie nicht beschränkt ist.

(ii) In den auf V äquivalenten Normen $\| \cdot \|, \| \cdot \|'$ seien Schranken $M > 0, M' > 0$ gemäß der Definition gewählt. Die jeweiligen ϵ-Kugeln um Punkte $a \in V$ erfüllen dann

$$B'_{\epsilon/M}(a) \subset B_\epsilon(a) \qquad \text{und} \qquad B_{\epsilon/M'}(a) \subset B'_\epsilon(a)$$

Hieraus folgt, daß jede Umgebung von a in der einen Norm auch eine Umgebung von a in der anderen Norm enthält. Also hat V in jeder der beiden Normen dieselben offenen Mengen.

◇

Satz 13.6 *Es sei* $a_1, a_2, ..., a_n$ *eine Basis des* n*-dimensionalen normierten Raumes* V. *Dann ist die durch*

$$L\, x := \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$$

definierte bijektive lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to V$ *stetig und ihre Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig. Darin trägt* $\mathbb{R}^n$ *die Maximum-Norm* $\| x \|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$.

Beweis.

(1) Mit $M := \max\limits_{1 \le k \le n} \| a_k \|$ gilt stets

$$\| L\,x \| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \;\| a_k \| \le \; n\,M \;\; \| x \|_\infty \,.$$

Nach Satz 13.1 ist daher L stetig. Die Hauptarbeit besteht also im Nachweis der Stetigkeit von L^{-1}.

(2) Gegeben sei $\epsilon > 0$. Dann ist $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \|_\infty = \epsilon\}$ als Urbild der in $\mathbb{R}$ abgeschlossenen Menge $\{\epsilon\}$ unter der auf $\mathbb{R}^n$ stetigen Normfunktion $x \mapsto \| x \|_\infty$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Da C die Null $0_{\mathbb{R}^n}$ nicht enthält, besitzt die stetige Funktion

$$x \mapsto \| L\, x \|$$

auf C ein positives Minimum $\delta > 0$.

(3) Zu jedem $y \in V$ mit $\| y \| < \delta$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $y \; = L(\lambda x) \; = \lambda \; Lx$ für ein $x \in C$, da ja L eine bijektive lineare Abbildung ist. Wegen

$$|\lambda| \;\; \| Lx \| = \| y \| < \delta \;\; \le \| Lx \|$$

gilt $|\lambda| \; < 1$. Wegen $\| y \| < \delta$ folgt

$$\| L^{-1}(y) \|_\infty = \| \lambda x \|_\infty = \; |\lambda| \;\; \| x \|_\infty = \; |\lambda|\, \epsilon \quad < \epsilon.$$

Also ist L^{-1} im Nullpunkt von V stetig.

◇

Satz 13.7 (Normäquivalenz in endlichdimensionalem Raum)
Für jeden n-dimensionalen Vektorraum gilt

(i) Je zwei Normen auf V sind äquivalent.

(ii) Unter jeder Norm ist V vollständig und Limites in V sind unabhängig von der Wahl der Norm.

Beweis.

(i) Sind $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ zwei Normen auf V, so schreiben wir V_k für den durch $\| \cdot \|_k$ normierten Raum V. Nach Satz 13.6 wird bei gegebener Basis $a_1, a_2, ..., a_n$ von V

$$L_k x := \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

eine bijektive lineare und samt Umkehrabbildung L_k^{-1} stetige Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf V_k. Daher ist das Kompositum $L := \; L_2 L_1^{-1} : V_1 \to V_2$ eine bijektive lineare und stetige Abbildung, deren Umkehrung $L^{-1} = L_1 L_2^{-1}$ ebenfalls stetig ist. Rein algebraisch ist L die Identität auf V. Mit den Schranken

$$M_1 := \sup\{\| L^{-1}z \|_1 : z \in V_2, \| z \|_2 \leq 1\}$$

$$M_2 := \sup\{\| Ly \|_2 : y \in V_1, \| y \|_1 \leq 1\}$$

gelten für alle $y \in V$ die Abschätzungen

$$\| y \|_2 = \| L(L^{-1}y) \|_2 \leq M_2 \ \| L^{-1}y \|_1 = M_2 \ \| y \|_1,$$

$$\| y \|_1 = \| L^{-1}(Ly) \|_1 \leq M_1 \ \| Ly \|_2 = M_1 \ \| y \|_2 .$$

Die beiden Normen sind daher äquivalent.

(ii) Bekanntlich ist $\mathbb{R}^n$ unter der Maximum-Norm vollständig (Bemerkung vor 5.6). Nach Satz 13.5 und wegen Teil (i) genügt es, eine Norm auf V anzugeben, unter der V vollständig ist. Man gewinnt sie vom $\mathbb{R}^n$:

$$\| \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \|_0 := \| x \|_\infty, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

◇

Korollar 13.8 *Es seien V und X normierte Vektorräume, V habe endliche Dimension n. Dann ist jede lineare Abbildung $L : V \to X$ stetig.*

Beweis. Es sei $a_1, ..., a_n$ eine Basis von V und $\| \cdot \|_0$ sei wieder die über diese Basis der Maximum-Norm des $\mathbb{R}^n$ entsprechende Norm auf V. Nach Satz 13.7 ist sie äquivalent zu jeder anderen Norm auf V.

Nach (N1)-(N3) gilt für Vektoren $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j a_j \in V$

$$\| Lx \| = \| \sum_{j=1}^{n} x_j \ L(a_j) \| \leq n \ M \ \| x \|$$

$$\text{mit} \qquad M := \max_{1 \leq j \leq n} \| L(a_j) \|$$

Aufgrund von Satz 13.1 ist daher L stetig. ◇

13.2 Kurven in Vektorräumen

Als "Weg" im metrischen Raum X bezeichnet man jede stetige Abbildung eines kompakten Intervalls $I = [a, b]$ mit $a < b$ in X:

$$\gamma : [a, b] \to X \qquad \text{stetig}$$

Beispiele

(1) In $X = \mathbb{C}$ mit dem gewöhnlichen Betrag als Norm definiert für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$

$$\gamma(t) := e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi k] =: I$$

einen Weg. In jedem Punkt $t_0 \in I$ gilt

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{e^{i(t-t_0)} - 1}{i(t - t_0)} \, i \, e^{it_0} = i \, e^{it_0}$$

Der Weg γ hat hier im Anfangspunkt $t = 0$ denselben Wert wie im Endpunkt $t = 2\pi k$; man sagt daher, γ sei ein "geschlossener" Weg.

(2) (Schraubenlinie)
Gegeben sei ein Radius $r > 0$ und eine "Ganghöhe" $2\pi c > 0$.

$$\sigma(t) := (r \cos t, r \sin t, ct), \qquad t \in [0, 2\pi k]$$

definiert einen Weg im $\mathbb{R}^3$. Durch koordinatenweise Betrachtung zeigt sich die Existenz von

$$\sigma'(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0} = (-r \sin t_0, r \cos t_0, c)$$

Definition 13.9 *Es sei $\gamma : I \to V$ ein Weg im n-dimensionalen normierten Vektorraum V. Man nennt γ im Punkt $t_0 \in I$* **differenzierbar***, wenn der folgende Limes existiert:*

$$\gamma'(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Der Vektor $\gamma'(t_0) \in V$ heißt dann die **Ableitung** *von γ in t_0. Wenn $I = [a, b]$ eine Unterteilung $t_0 = a < t_1 < ... < t_r = b$ besitzt derart, daß alle Restriktionen $\gamma|[t_{k-1}, t_k]$ differenzierbar sind mit auf $[t_{k-1}, t_k]$ stetiger Ableitung, dann heißt $\gamma : I \to V$ eine* **stückweise stetig differenzierbare Kurve***.*

Bemerkungen:

(1) Weder die Definition der Differenzierbarkeit noch der Wert der Ableitung hängt von der Wahl der Norm in V ab (vgl. Satz 13.7).

(2) Ist $\gamma : I \to V$ eine stetig differenzierbare Kurve, so bildet für jedes $t_0 \in I$ die Menge $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)\,\mathbb{R}$ die **Tangente** an γ im Punkt $\gamma(t_0)$. Der Vektor $\gamma'(t_0)$ heißt **Tangentenvektor**. Die Punkte $t_0 \in I$ mit Tangentenvektor $\gamma'(t_0) = 0_V$ werden **singulär** genannt. Besitzt γ keine singulären Punkte, so heißt γ eine **reguläre Kurve**.

Beispiele:

(3) Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist der **Graph** γ_f von f, definiert durch

$$\gamma_f(t) := (t, f(t)), \qquad t \in [a, b]$$

eine reguläre Kurve im $\mathbb{R}^2$, da $\gamma_f'(t) = (1, f'(t))$ ist.

(4) Die "Neilsche Parabel" $t \mapsto (t^2, t^3)$, $t \in [-1, 1]$ definiert eine stetig differenzierbare Kurve mit der Ableitung $t \mapsto (2t, 3t^2)$. Sie hat genau einen singulären Punkt, nämlich $t_0 = 0$.

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $e_1, ..., e_n$ sei eine Basis von V. Das System der Koordinaten bzgl. dieser Basis identifiziert V mit $\mathbb{R}^n$. Jede Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ wird so durch ihre Koordinatenfunktionen $\gamma_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschrieben

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^{n} e_j \, \gamma_j(t)$$

Lemma 13.10 *Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to V$ ist im Punkt $t \in I = [a, b]$ genau dann differenzierbar, wenn jede Koordinatenfunktion $\gamma_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq n)$ dort differenzierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\gamma'(t) = \sum_{j=1}^{n} e_j \, \gamma_j'(t).$$

Beweis. Wegen der Äquivalenz aller Norman auf V bedeutet

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s \neq t}} \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} = \gamma'(t)$$

dasselbe wie

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s \neq t}} \left| \frac{\gamma_k(s) - \gamma_k(t)}{s - t} - \gamma_k'(t) \right| = 0 \qquad (1 \leq k \leq n)$$

Darin bezeichnet $\gamma_k'(t)$ die k-te Koordinate des Vektors $\gamma'(t)$ bzgl. der Basis $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ von V, also

$$\gamma'(t) = \sum_{k=1}^{n} e_k \, \gamma_k'(t).$$

◇

Definition 13.11 *Es sei $\gamma : [a, b] \to V$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve im n-dimensionalen normierten Raum V. Als* **Länge** *von γ wird erklärt*

$$l(\gamma) := \int_a^b \| \gamma'(t) \| \; dt$$

Bemerkungen: Die Kurvenlänge hängt von der Wahl der Norm ab. So hat beispielsweise die Strecke

$$s(t) \;=\; (1+i)\,t, \qquad t \in [0,1]$$

in der euklidischen Norm, die in $\mathbb{C}$ mit dem Betrag zusammenfällt, die Länge $\sqrt{2}$, während ihre Länge in der Maximum-Norm des zugrundeliegenden $\mathbb{R}^2$ gleich 1 ist.
Im Vektorraum $V = \mathbb{R}$ wird die Länge von Kurven immer auf die euklidische Norm bezogen, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Im nächsten Satz wird eine Motivation für die Definition der Kurvenlänge gegeben.

Satz 13.12 *Im n-dimensionalen normierten Raum V sei $\gamma : [a,b] \to V$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit der Länge $l(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt$. Dann gilt für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < ... < t_r = b$ die Ungleichung*

$$\sum_{j=1}^{r} \| \gamma(t_j) \; - \gamma(t_{j-1}) \| \leq \; l(\gamma).$$

Ferner gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Schranke $\delta > 0$ derart, daß für Unterteilungen der Feinheit $\max\limits_{1\leq j\leq r}(t_j - t_{j-1}) \;\leq \delta$ gilt

$$0 \;\leq\; l(\gamma) \;-\; \sum_{j=1}^{r} \| \gamma(t_j) \; - \gamma(t_{j-1}) \| \leq \epsilon.$$

Zum Beweis verwenden wir ein auch sonst nützliches Resultat:

Lemma 13.13 *Zu jeder stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \to V$ im n-dimensionalen normierten Raum V gibt es zu jedem $\eta > 0$ eine Schranke $\delta > 0$ derart, daß für alle $s, t \in [\alpha, \beta]$ mit $0 \leq \; |s-t| \; \leq \delta$ gilt*

$$\| \frac{\gamma(s) \; - \gamma(t)}{s-t} \; - \; \gamma'(t) \; \| \leq \; \eta.$$

Beweis. Die Wahl von δ hängt natürlich von der Norm auf V ab. Da aber je zwei Normen äquivalent sind, genügt es, den Beweis für eine spezielle Norm zu führen. Mit einer Basis $e_1, ..., e_n$ von V beschreiben wir die Kurve $\gamma(t) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \gamma_k(t)$ durch ihre stetig differenzierbaren Koordinaten-Funktionen γ_k. Die Ableitung γ_k' ist auf dem Kompaktum $[\alpha, \beta]$ gleichmäßig stetig. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein ξ_k zwischen s und t derart, daß gilt

$$\left| \frac{\gamma_k(s) - \gamma_k(t)}{s-t} \; - \; \gamma_k'(t) \right| \;=\; |\gamma_k'(\xi) \; - \gamma_k'(t)|.$$

Es gibt ein $\delta_k > 0$ derart, daß für alle $\tau, t \in [\alpha, \beta]$ mit $|\tau - t| \; \leq \delta_k$ gilt $|\gamma_k'(\tau) \; - \gamma_k'(t)| \; \leq \eta$.

Man wähle nun $\delta \;=\; \min\limits_{1\leq k\leq n} \delta_k$ und erhält

$$\max_{1\leq k\leq n} \left| \frac{\gamma_k(s) - \gamma_k(t)}{s-t} \; - \; \gamma_k'(t) \right| \; \leq \eta, \qquad \text{falls } s, t \in [\alpha, \beta] \quad \text{und } 0 < |s-t| \leq \delta$$

$\diamond$

Beweis. (von Satz 13.12)

(1) Es genügt zu zeigen, daß für jedes $\epsilon > 0$ bei hinreichend feiner Unterteilung gilt

$$\left| l(\gamma) - \sum_{j=1}^{r} \| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \| \right| \leq \epsilon \qquad (*)$$

Denn der Ausdruck unter dem Betragszeichen kann dann nie negativ werden: Nach der Dreiecksungleichung wird die Summe $\sum_{j=1}^{r} \| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \|$ bei Verfeinerung der Unterteilung nicht kleiner. Wäre sie einmal größer als $l(\gamma)$, so bliebe die linke Seite von $(*)$ oberhalb einer Zahl $\epsilon_0 > 0$.

(2) Wir beginnen mit einer Unterteilung $a = a_0 < a_1 < ... < a_q = b$ von $[a, b]$, auf deren Teilintervallen $[a_{k-1}, a_k]$ die Restriktion von γ stetig differenzierbar ist $(1 \leq k \leq q)$. Die in der Behauptung $(*)$ versteckte Schranke $\delta > 0$ wird durch vier Bedingungen bestimmt:

Erstens wird δ bzgl. des Integrals $l(\gamma)$ so klein gewählt, daß für Teilungen $a_0 = t_0 < ... < t_r = b$ der Feinheit $\max_j (t_j - t_{j-1}) \leq \delta$ gilt

$$\left| l(\gamma) - \sum_{j=1}^{r} \| \gamma'(t_j) \| \ (t_j - t_{j-1}) \right| \leq \frac{\epsilon}{4}$$

(Um Eindeutigkeit von $\gamma'(t_j)$ zu erzielen, nehmen wir die linksseitige Ableitung von γ, falls $t_j = a_k$ sein sollte.

Zweitens wird δ bzgl. der auf $[a, b]$ gleichmäßig stetigen Abbildung γ so klein gewählt, daß gilt

$$\| \gamma(s) - \gamma(t) \| \leq \frac{\epsilon}{4q} \qquad \text{für } s, t \in [a, b] \quad \text{mit } |s - t| \leq \delta.$$

Drittens verlangen wir $qM\delta \leq \frac{\epsilon}{4}$ für $M = \sup_{t \in [a,b]} \| \gamma'(t) \|$

Viertens wird δ auch so klein gewählt, daß in Lemma 13.13 für jedes Teilintervall $[a_{k-1}, a_k]$ $(1 \leq k \leq q)$ die Abschätzung für $\eta = \frac{\epsilon}{4(b-a)}$ gültig ist.

(3) Zu dem unter (2) fixierten $\delta > 0$ sei $a = t_0 < t_1 < ... < t_r = b$ eine Teilung der Feinheit $\leq \delta$.

Mit A bezeichnen wir die Menge der Indices j, für die es ein k $(1 \leq k \leq q)$ gibt mit $a_k \in]t_{j-1}, t_j[$. Dann ist $\sharp A \leq q$. Deshalb gelten die Abschätzungen

$$\left| l(\gamma) - \sum_{j=1}^{r} \| \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \| \right| = \left| l(\gamma) - \sum_{j=1}^{r} \| \gamma'(t_j) \| \ (t_j - t_{j-1}) \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{r}\{\| \gamma'(t_j)\,(t_j - t_{j-1}) \| \; - \; \| \gamma(t_j) \; - \; \gamma(t_{j-1}) \|\}\Bigg|$$

$$\le \frac{\epsilon}{4} + \sum_{j=1}^{r} \| \gamma(t_j) \; - \gamma(t_{j-1}) \; - \gamma'(t_j)\,(t_j - t_{j-1}) \| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$$\le \frac{\epsilon}{4} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin A}}^{r} \| \gamma(t_j) \; - \gamma(t_{j-1}) \; - \gamma'(t_j)\,(t_j - t_{j-1}) \| \; + q\,\frac{\epsilon}{4q} \; + \; qM\,\delta$$

$$\le \frac{3}{4\epsilon} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin A}} \frac{\epsilon}{4(b-a)}\,(t_j - t_{j-1}) \; \le \epsilon$$

$\diamond$

Korollar 13.14 (Schrankensatz)
Für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to V$ *im* n*-dimensionalen normierten Raum* V*, deren Ableitung eine durch* M *beschränkte Norm* $\| \gamma'(t) \| \le M, \;\; t \in [a,b]$ *besitzt, gilt*

$$\| \gamma(b) \; - \gamma(a) \| \le \; M\,(b-a)$$

Das ergibt sich aus dem ersten Teil von Satz 13.12 mit der gröbsten Unterteilung $t_0 = a, t_1 = b$ wegen der Standardintegralabschätzung $l(\gamma) \; \le M\,(b-a)$.

Beispiele zur Längenberechnung von Kurven

(1) Die k-fach durchlaufene Kreislinie vom Radius $r > 0$

$$\gamma_r(t) \; = \; re^{it}, \qquad\qquad t \in [0, 2\pi k]$$

hat die Ableitung $\gamma_r'(t) \; = \;\; ire^{it}$, sie hat daher in der durch den Betrag auf $\mathbb{C}$ definierten Norm die Länge

$$l(\gamma_r) \; = \; \int_0^{2\pi k} r\;dt \; = \; 2\pi\;kr$$

(2) Für die aus der stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch ihren Graphen $\gamma_f(t) \; = \; (t, f(t))$ im euklidischen $\mathbb{R}^2$ entstehenden Kurve ist die Ableitung $\gamma_f'(t) \; = \; (1, f'(t))$. Daher wird ihre euklidische Länge

$$l(\gamma_f) \; = \; \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\;dt$$

(3) Durch Abrollen eines Kreises vom Radius 1 auf der x-Achse des $\mathbb{R}^2$ entsteht als Bahnkurve eines Umfangspunktes die "gemeine Zykloide"

$$\zeta(t) \; = \; (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

Ihre euklidische Länge über einen Umlauf des Kreises ist

$$l(\zeta) \;=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\; dt \;=\; 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t/2)}\; dt$$

$$=\; -4\;\cos(t/2)\Big|_0^{2\pi} \;=\; 8.$$

Definition 13.15 (Parametertransformation)
Es sei $\gamma : [a,b] \to V$ *ein Weg im* n*-dimensionalen normierten Raum* V*. Ist* $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *eine bijektive stetige Abbildung, dann heißt* $\delta := \gamma \circ \varphi$ *der aus* γ *durch Umparametrisierung mittels der Parametertransformation* φ *entstandene Weg. Da* φ *als injektive stetige Abbildung streng monoton ist, tritt genau einer der Fälle ein:*

$$(\varphi(c), \varphi(d)) \;=\; (a,b) \qquad\qquad \varphi \;\; \text{"orientierungstreu"}$$

$$(\varphi(c), \varphi(d)) \;=\; (b,a) \qquad\qquad \varphi \;\; \text{"orientierungsumkehrend"}.$$

Ist φ *und ihre Umkehrabbildung* φ^{-1} *stetig differenzierbar, so heißt* φ *eine* C^1*-Parametertransformation. Insbesondere ist dann* φ' *nullstellenfrei, also als stetige Funktion auf* $[c,d]$ *von festem Vorzeichen sign* φ'*, und zwar 1 oder -1 jenachdem, ob* φ *orientierungstreu oder orientierungsumkehrend ist.*

Wenn daneben auch γ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar ist, so wird $\delta = \gamma \circ \varphi$ stetig diferenzierbar mit Ableitung

$$\delta'(t) \;=\; \underbrace{\gamma'(\varphi(t))}_{\text{Vektor}} \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{Skalar}}$$

Dies ergibt sich mit Lemma 13.10 aus der Kettenregel.

Bemerkung: Unter C^1-Parametertransformationen bleiben Kurvenlängen invariant:

$$l(\delta) \;=\; \int_c^d \| \,\delta'(t)\, \| = \;\; \text{sign}\;\varphi' \int_c^d \| \,\gamma'(\varphi(t))\, \| \;\; \varphi'(t)\; dt$$

$$=\;\; \text{sign}\;\varphi' \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \| \,\gamma'(s)\, \| \;\; ds \;=\; \int_a^b \| \,\gamma'(s)\, \| \;\; ds$$

13.3 Totale Differenzierbarkeit

Definition 13.16 *Seien V, W endlich-dimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $U \subseteq V$ eine offene Menge in V. Eine Abbildung $f : U \to W$ heißt im Punkt $a \in U$* **differenzierbar**, *wenn eine lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(V, W)$ existiert derart, daß die durch die Gleichung*

$$f(a+h) \;=\; f(a) \;+\; A\,h \;+\; R(h)$$

in einer Umgebung $U_0 \subseteq V$ von $0 \in V$ definierte Restfunktion $R : U_0 \to W$ folgendes erfüllt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{R(h)}{\| h \|_V} \;=\; 0 \in W \qquad\qquad (*)$$

Natürlich muß man sich fragen, ob die lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(V, W)$ gemäß Definition 13.16 eindeutig festgelegt ist. Dies ist tatsächlich der Fall. Ist nämlich

$$f(a+h) \;=\; f(a) \;+ A_1 h \;+ R_1(h), \qquad f(a+h) \;=\; f(a) \;+ A_2 h \;+ R_2(h)$$

mit $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ und R_1 und R_2 erfüllen $(*)$, so gilt für $B \;= A_1 - A_2 \in \mathcal{L}(V, W)$: $B(h) \;= R_2(h) - R_1(h)$ ist linear in h und damit

$$\frac{\| B(h) \|_W}{\| h \|_V} \;\to 0 \qquad\qquad \text{mit } h \to 0,\;\; h \neq 0$$

Insbesondere gilt für festes $h \in V$, $\| h \| = 1$ und beliebiges $t > 0$:

$$\| B(h) \|_W = \frac{t \;\| B(h) \|_W}{t} \;=\; \frac{\| B(th) \|_W}{\| th \|_V} \;\to 0 \qquad \text{mit } t \to 0$$

Das heißt $B(h) = 0$ für alle $h \in V$, $\| h \|_V = 1$, also $A_1 - A_2 \;= B = 0_{V,W}$.

Als Symbol für das eindeutig bestimmte $A \in \mathcal{L}(V, W)$ nimmt man $A = Df(a)$ oder $A = f'(a)$, und nennt A die **totale Ableitung** oder **totales Differential** von f in a.

Satz 13.17 *Ist $f : U \to W$, $U \subseteq V$ offen, in $a \in U$ differenzierbar, so ist f in a auch stetig.*

Beweis. Mit $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{R(h)}{\| h \|_V} \;= 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß $\| R(h) \|_W \leq \| h \|_V$ für $\| h \|_V \leq \delta$. (Wir können annehmen, daß $U_\delta(a) \subseteq U$. Sonst wähle man ein entsprechend kleineres δ.) Es gilt dann

$$\| f(a+h) \;- f(a) \|_W \leq \| Ah \|_W \;+\; \| R(h) \|_W \;\; (\|A\| \;+1) \;\; \| h \|_V$$

für $\| h \|_V < \delta$. Damit ist f stetig in a. $\diamond$

Bemerkung: Welche Normen in V und W gewählt wurden, ist unwichtig wegen Satz 13.7.

Beispiel: $U = V = \mathbb{R}^2,\;\; W = R, \quad f : U \to W$
$f((x_1, x_2)) \; = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$

Für $a = (a_1, a_2),\;\; h = (h_1, h_2)$ gilt

$$\begin{aligned} f(a+h) \; - f(a) \;\; &= \;\; (a_1 + h_1 - 1)(a_2 + h_2 - 1) \; - \; (a_1 - 1)(a_2 - 1) \\ &= \;\; (a_1 - 1)h_2 \; + \; (a_2 - 1)h_1 \; + \; h_1 h_2 \\ &= \;\; \left\langle \begin{pmatrix} a_2 - 1 \\ a_1 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle \; + \; R(h) \end{aligned}$$

mit $R(h) \; = h_1 h_2$.

Nehmen wir die Euklidische Norm $\| \cdot \|_2$ im $\mathbb{R}^2$, so gilt

$$\frac{|R(h)|}{\| h \|_2} \; = \; \frac{|h_1 \cdot h_2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} \; \leq \; \frac{\frac{1}{2}\,(h_1^2 + h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} \; = \; \frac{1}{2} \; \| h \|_2 \to 0 \quad \text{mit } h \to 0$$

Die Ableitung $A \; = Df(a) \; = f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$h \;\longrightarrow\; \left\langle \begin{pmatrix} a_2 - 1 \\ a_1 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle \; = \; \underbrace{(a_2 - 1, a_1 - 1)}_{1 \times 2 - \text{Matrix}} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Dieses Beispiel gehört zu dem Fall, daß $V = \mathbb{R}^n,\; W = \mathbb{R}$ ist, d.h. $f : U \to \mathbb{R},\; U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Ableitung A von f in $a \in U$ ist dann gegeben durch $c \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Df(a)\, h \; = \; A\, h \; = \; \langle c, h \rangle \; = \; \sum_{k=1}^{n} c_k h_k$$

Man hat also

$$f(a+h) \; = \; f(a) \; + \; \sum_{k=1}^{n} c_k h_k \; + \; R(h), \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{R(h)}{\| h \|} = 0$$

Um die $c_k \in \mathbb{R},\; k = 1, ..., n$ zu bestimmen, wählen wir $h = te_k$ (e_k kanonischer k-ter Einheitsvektor). Man hat dann

$$\frac{1}{t}\; (f(a + te_k) \; - \; f(a)) \; = \; c_k \; + \; \frac{1}{t}\; R(e_k t)$$

Mit $t \to 0$ folgt:

$$c_k = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_k + e_k t) - f(a)}{t} \quad =: \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

$c_k \; = \; \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ ist die sog. "partielle Ableitung" von f nach der k-ten Koordinate im Punkt a. Die Ableitung von f im Punkt $a \in U$ hat also die Gestalt

$$Df(a)\, h \; = \; \langle \; \text{grad } f(a)^T, h \rangle$$

wobei grad $f(a) := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ den sog. **Gradienten von *f*** im Punkt a bezeichnet. Man schreibt auch $\nabla f(a) \; = \text{grad } f(a)$ (Nabla-Operator).

Der Fall $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^m$ mit kanonischer Basis, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, bedeutet daß man $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ mit entsprechenden Eigenschaften sucht. Schreibt man

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$, so hat man das Problem der Differenzierbarkeit von $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf das Problem der Differenzierbarkeit der $f_k : U \to \mathbb{R}$, $k = 1, ..., m$ zurückgeführt.

Es gilt dann (beachte $h \in \mathbb{R}$) : $\quad Df(a)\, h = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix} h$

Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück.

Ist $f : V \to W$ konstant, so ist $Df(a) = 0_{\mathcal{L}(V,W)}$.

Ist $f : V \to W$ linear, d.h. $f \in \mathcal{L}(V, W)$, dann ist $Df(a) = f$. Mit der Linearität von f gilt nämlich $f(a + h) - f(a) = f(h)$, also ist $R(h) = 0$.

Allgemeine Regeln des Differenzierens:

Sind $f, g : U \to W$ in $a \in U \subseteq V$ differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind $f + g : U \to W$ und $\lambda f : U \to W$ in $a \in U$ differenzierbar, und es gilt:

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a), \qquad D(\lambda f)(a) = \lambda\, Df(a).$$

Man kann auch die Kettenregel auf die vorliegende Situation verallgemeinern.

Satz 13.18 (Kettenregel) *Seien V_1, V_2, V_3 endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume, $U_k \subseteq V_k$, $k = 1, 2$ offen, $f : U_1 \to V_2$, $g : U_2 \to V_3$*

$f(U_1) \subseteq U_2$. f sei in $a \in U_1$ differenzierbar, g in $f(a) \in U_2$ differenzierbar. Dann ist die Abbildung $g \circ f : U_1 \to V_3$ in $a \in U_1$ differenzierbar, und es gilt

$$\begin{array}{ccc} D(g \circ f)(a) & = & Dg(f(a))\ Df(a) \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \qquad \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ \mathcal{L}(V_1, V_3) & & \mathcal{L}(V_2, V_3)\ \ \mathcal{L}(V_1, V_2) \end{array}$$

Beweis. Es wird gezeigt, daß für $0 < \epsilon < 1$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\| g \circ f\,(a + h) - g \circ f\,(a) - Dg(f(a))\, Df(a)\, h \|_{V_3} \leq \epsilon\ \| h \|_{V_1}$$

für alle $h \in V_1$ mit $\| h \|_{V_1} < \delta$. Dies ist exakt zu zeigen.

Sei also $0 < \epsilon < 1$. Da $Df(a)$ und $Dg(f(a))$ stetige lineare Abbildungen sind, gibt es eine Schranke $M \geq 1$ mit

$$\| Df(a)\, x \|_{V_2} \leq M \; \| x \|_{V_1} \qquad \text{für alle } x \in V_1 \quad \text{und} \tag{13.1}$$

$$\| Dg(f(a))\, y \|_{V_3} \leq M \; \| y \|_{V_2} \qquad \text{für alle } y \in V_2 \tag{13.2}$$

Ferner existiert ein $\eta > 0$ mit

$$\| g(f(a) + k) \;-\; g(f(a)) \;-\; Dg(f(a))\, k \|_{V_3} \leq \frac{\epsilon}{2M+2} \; \| k \|_{V_2} \tag{13.3}$$

für alle $k \in V_2$ mit $\| k \|_{V_2} < \eta$.

Setze speziell $k := \; f(a+h) \; - f(a) \; \in V_2$. Dann existiert $\xi > 0$ mit

$$\| k \;-\; Df(a)\, h \|_{V_2} \leq \frac{\epsilon}{2M} \; \| h \|_{V_1} \qquad \text{für alle } h \in V_1, \quad \| h \|_{V_1} < \xi. \tag{13.4}$$

Folglich ist für $\| h \|_{V_1} < \xi$

$$\begin{aligned} \| k \|_{V_2} \;&\leq\; \| Df(a)\, h \|_{V_2} \;+ \frac{\epsilon}{2M} \; \| h \|_{V_1} \\ &\overset{(1)}{\leq} \; M \; \| h \|_{V_1} \;+ \frac{\epsilon}{2M} \; \| h \|_{V_1} \leq \; (M+1) \; \| h \|_{V_1} \end{aligned} \tag{13.5}$$

Setze nun $\delta = \min(\xi, \dfrac{\eta}{M+1})$. Dann gilt für $\| h \| < \delta$

$$\begin{aligned} &\| g \circ f\,(a+h) \;-\; g \circ f\,(a) \;-\; Dg(f(a))\; Df(a)\, h \|_{V_3} \\ \leq\; &\| g(f(a)+k) \;-\; g(f(a)) \;-\; Dg(f(a))\, k \|_{V_3} \;+\; \| Dg(f(a))\, (k - Df(a)\, h) \|_{V_3} \\ \overset{(2),(3)}{\leq}\; &\frac{\epsilon}{2M+2} \; \| k \|_{V_2} \; + M \; \| k \; - Df(a)\, h \|_{V_2} \overset{(4),(5)}{\leq} \frac{\epsilon}{2} \; \| h \|_{V_1} \; + \frac{\epsilon}{2} \; \| h \|_{V_1} \\ &\qquad (\text{beachte: } \; \| k \|_{V_2} < \eta) \qquad = \; \epsilon \; \| \; h \; \|_{V_1} \, . \end{aligned}$$

$\diamond$

Um die totale Ableitung $Df(a)$ konkret zu bestimmen, wählt man in der Regel in $V \cong \mathbb{R}^n$, $W \cong \mathbb{R}^m$ die jeweilige kanonische Basis und bestimmt $Df(a)$ über die partiellen Ableitungen. (Wir werden das im folgenden auch so machen!). Man behalte aber in Erinnerung, daß aus der Existenz der partiellen Ableitungen in a noch lange nicht die Differenzierbarkeit von f in a folgt, vgl. T34, Blatt12.

Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Seien $\{e_1, ..., e_n\}$ und $\{w_1, ... w_m\}$ die kanonischen Basen des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Die Komponenten von f sind die Funktionen $f_1 : U \to \mathbb{R}, ..., f_m : U \to \mathbb{R}$, so daß gilt

$$f(x) \;=\; \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, w_i, \qquad\qquad x \in U.$$

Für $a \in U$, $\; i \in \{1, ..., m\}$, $\; k \in \{1, ..., n\}$ definieren wir

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f_i(a + te_k) - f_i(a)}{t},$$

vorausgesetzt dieser Grenzwert existiert. $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)$ wird **partielle Ableitung** von f in a genannt. Manchmal schreibt man auch $D_k f_i(a)$ statt $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)$.

Satz 13.19 *Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, im Punkte $a \in U$ differenzierbar. Dann existieren die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)$ für alle $k \in \{1, ..., n, \}$, $i \in \{1, ..., m\}$, und es gilt*

$$Df(a)\, e_k \;=\; \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)\, w_i \qquad\qquad k = 1, ..., n$$

oder geschrieben in Matrix-Form:

$$Df(a) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei $k \in \{1, ..., n\}$ fest. Da f in a differenzierbar ist, gilt

$$f(a + te_k) \;-\; f(a) \;=\; Df(a)\,(te_k) \;+\; R(te_k), \qquad \text{wobei } \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\| R(te_k) \|}{t} = 0$$

Damit folgt

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} \;=\; Df(a)\, e_k, \qquad\qquad \text{d.h.}$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(a + te_k) - f(a)}{t}\, w_i \;=\; Df(a)\, e_k.$$

Damit hat jeder Quotient in der Summe einen Grenzwert mit $t \to 0$, d.h. $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)$ existieren für $i = 1, ..., m$. $\diamond$

Bemerkung: Die Matrix $Df(a) \;=\; \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)\right)_{i,k}$ ($m \times n$-Matrix) heißt **Jacobimatrix** von f in a oder **Funktionalmatrix**. Um sie aufstellen zu können, braucht man nur die partiellen Ableitungen von f in a.

Wir wollen noch in einem allgemeinen Beispiel die Kettenregel verwenden. Sei $\gamma :]\alpha, \beta[\to U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, eine auf $]\alpha, \beta[$ differenzierbare Kurve, und sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir betrachten $g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$, $g(t) \;= f(\gamma(t))$.

Mit Satz 13.18 ist $g :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt (mit Benutzung der partiellen Ableitungen von f):

$$Dg(t) \;=\; Df(\gamma(t))\, D\gamma(t),$$

wobei $Dg(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $Df(\gamma(t)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$, $D\gamma(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n)$. Nach Wahl der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^n$ bekommt man

$$Df(\gamma(t)) \;=\; \text{grad } f(\gamma(t)) \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\right)$$

und

$$D(\gamma(t)) \;=\; (\gamma_1'(t), ..., \gamma_n'(t))^T \;=\; \gamma'(t) \qquad\qquad \text{(s. 13.2)}$$

$$g'(t) \;=\; Dg(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\; \gamma_i'(t) \;=\; \langle \text{grad } f(\gamma(t))^T, \gamma'(t) \rangle.$$

Als spezielle Kurve γ betrachte $\gamma(t) = a + tu$; $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$, eine Gerade durch a in Richtung u. Offensichtlich ist $\gamma'(t) = u$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Speziell

$$Dg(0) \;=\; \langle \text{grad } f(0)^T, u \rangle \tag{13.6}$$

Berechnet man $g'(0) = Dg(0)$ direkt als Differentialquotient, so gilt andererseits

$$Dg(0) \;=\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{g(t) - g(0)}{t} \;=\; \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} \tag{13.7}$$

Letzteren Grenzwert nennt man die **Richtungsableitung** $D_u f(a)$ **von** $\boldsymbol{f}$ **in Richtung** $\boldsymbol{u}$ **im Punkkt** $\boldsymbol{a}$, also für $f: U \to \mathbb{R}$, $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$D_u f(a) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}.$$

Beachte $D_{e_k} f(a) \;=\; \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Bei variablem u, also variabler Richtung, wird $Dg(0)$ in (13.6) maximal, falls u ein positives skalares Vielfaches von grad $f(a)$ ist (ausgenommen wird hier grad $f(a)^T = 0$).
Mit anderen Worten: Die Richtungsableitung wird maximal, wenn man in Richtung des Gradienten schaut.

Eine zusätzliche geometrische Deutung zum Gradienten erhält man durch Betrachtung der **Niveaumenge** von f in $a \in U$

$$N(a) := \{x \in U : \; f(x) = f(a)\}$$

Sei $\gamma :]\alpha, \beta[\to N(a)$ eine differenzierbare Kurve in $N(a)$. Da die Komposition $g(t) = f(\gamma(t)) = f(a)$ konstant ist, gilt

$$0 \;=\; g'(t) \;=\; \langle \text{grad } f(\gamma(t))^T, \gamma'(t) \rangle$$

Ist nun $\gamma(t_0) = a$, so gilt $0 = \langle \text{grad } f(a)^T, \gamma'(t_0) \rangle$ für alle diese Kurven γ. Anschaulich kann man sagen, daß der Gradient grad $f(a)$ senkrecht auf der Niveaumenge $N(a)$ von f in a steht.

Wir wollen nun herleiten, unter welchen Bedingungen an die partiellen Ableitungen von f die Differenzierbarkeit von f folgt.

Zunächst zeigen wir eine Folgerung des Mittelwertsatzes 9.11 für vektor-wertige Funktionen.

Lemma 13.20 *Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ in $]a,b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $x \in\,]a,b[$ mit*

$$\| \, g(b) - g(a) \, \|_2 \leq \ \|g'(x)\|_2 \, (b-a)$$

Beweis. Setze $z = g(b) - g(a) \in \mathbb{R}^m$ und definiere $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(t) \ = \ z \, g(t) \ = \ \langle z, g(t) \rangle$$

φ ist differenzierbar auf $]a,b[$ und stetig auf $[a,b]$. Mit Satz 9.11 existiert ein $x \in\,]a,b[$ mit

$$\varphi(b) - \varphi(a) \ = \ \varphi'(x) \, (b-a) \ = \ \langle z, g'(x) \rangle \, (b-a)$$

Andererseits gilt

$$\varphi(b) - \varphi(a) \ = \ \langle z, g(b) \rangle \ - \ \langle z, g(a) \rangle \ = \ \langle z, z \rangle \ = \ \|z\|_2^2$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $\mathbb{R}^m$ gilt

$$\|z\|_2^2 \ = \ \langle z, g'(x) \rangle \, (b-a) \ \leq \ \|z\|_2 \ \| \, g'(x) \, \|_2 \ (b-a),$$

also

$$\| \, g(b) - g(a) \, \|_2 = \ \|z\|_2 \ \leq \| \, g'(x) \, \|_2 \ (b-a).$$

◇

Lemma 13.21 *Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex. (U heißt konvex, falls mit $a, b \in U$ auch $ta + (1-t)b \in U$ gilt für alle $t \in [0,1]$.) Ist f in U differenzierbar (d.h. in jedem $a \in U$ differenzierbar) und gilt $\| \, Df(a) \, \|_{2,2} \leq M$ für alle $a \in U$, so gilt*

$$\| \, f(b) \ - \ f(a) \, \|_2 \leq \ M \ \| \, b - a \, \|_2 \qquad\qquad \text{für alle } a, b \in U.$$

Beweis. Wähle $a, b \in U$ fest. Bezeichne $I = \{ta + (1-t)\, b : \ t \in \mathbb{R}\}$. I ist offen und enthält $[0,1]$. Setze $\gamma : I \to U$, $\gamma(t) = ta + (1-t)b$ und schließlich $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\gamma(t))$. Wir haben mit der Kettenregel (Satz 13.18):

$$Dg(t) \ = \ Df(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \ = \ Df(\gamma(t)) \, (a-b)$$

und damit für alle $t \in [0,1]$

$$\| \, g'(t) \, \|_2 = \| \, Dg(t) \, \|_2 \leq \| \, Df(\gamma(t)) \, \|_{2,2} \, \| \, b - a \, \|_2 \leq \ M \ \| \, b - a \, \|_2$$

Mit Lemma 13.20 folgt mit einem $x \in\,]0,1[$

$$\| \, f(b) \ - f(a) \, \|_2 = \| \, g(0) \ - g(1) \, \|_2 \leq \ \|g'(x)\|_2 \ \leq \ M \ \| \, b - a \, \|_2$$

◇

Bemerkung: Lemma 13.20 und Lemma 13.21 können für beliebige endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume formuliert werden. Dabei müssen die Schranken $\|g'(x)\|_2$ und M entsprechend angepaßt weren.

Korollar 13.22 *Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Gilt $Df(a) = 0$ für alle $a \in U$, so ist f konstant.*

Beweis. Mit Lemma 13.21 ist $f(a) = f(b)$ für alle $a, b \in U$. $\diamond$

Man sagt, daß $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, stetig differenzierbar in U ist, falls $a \mapsto Df(a)$, $U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine stetige Abbildung ist. Man schreibt dann $f \in C^1(U)$. Ausführlich heißt $f \in C^1(U)$: Ist $a \in U$, $\epsilon > 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\| Df(b) - Df(a) \| < \epsilon \qquad \text{für } \|b - a\| < \delta,$$

wobei die Operator-Norm in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ zu betrachten ist.

Satz 13.23 *Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt $f \in C^1(U)$ genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ existieren und stetig sind.*

Beweis. Sei $f \in C^1(U)$. Wir wissen mit Satz 13.10, daß alle partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)$, $a \in U$, $i \in \{1, ..., m\}$, $k \in \{1, ..., n\}$ existieren. Außerdem gilt (vergleiche Satz 13.19)

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) = \langle Df(a)\, e_k, w_i \rangle$$

und folglich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(b) \right| = |\langle Df(a)\, e_k, w_i \rangle - \langle Df(b)\, e_k, w_i \rangle|$$
$$\leq \| (Df(a) - Df(b))\, e_k \|_2 \leq \| Df(a) - Df(b) \|,$$

wobei wir $\|e_k\|_2 = 1 = \|w_i\|_2$ benutzt haben. Somit sind die Funktionen $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} : U \to \mathbb{R}$ stetig.

Für die Umkehrung können wir uns auf den Fall $m = 1$ beschränken. (Wir haben für die Differenzierbarkeit von f zu zeigen, daß $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - Jf(a)\, h}{\|h\|} = 0$ gilt, wobei $Jf(a)$ die Jacobi-Matrix ist. Daher reicht es, jede Komponenten-Funktion $f_i : U \to \mathbb{R}$ zu untersuchen.) Sei $a \in U$, $\epsilon > 0$. Wähle $r > 0$ mit $U_r(a) \subseteq U$ und $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) - \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right| < \dfrac{\epsilon}{n}$ für alle $x \in U_r(a)$, $k = 1, ..., n$.

Sei nun $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|_2 < r$. Mit $h = (h_1, ..., h_n)^T$ bezeichne

$$v_0 = 0, \qquad v_k = (h_1, ..., h_k, 0, ..., 0) \quad \text{für } k = 1, ..., n$$

Dann gilt

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (f(a + v_k) - f(a + v_{k-1}))\,.$$

Nun ist $U_r(a)$ offen und konvex. Ferner gilt mit $\|v_k\|_2 \ < r$ auch $a + v_k \in U_r(a)$ für $k = 0, 1, ..., n$. Somit sind die Verbindungsstrecken zwischen $a + v_{k-1}$ und $a + v_k$ ganz in $U_r(a)$. Nun ist $a + v_k \ = a + v_{k-1} + h_k e_k$. Mit dem Mittelwertsatz 9.11 angewendet auf die stetig differenzierbare Funktion $\varphi_k : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_k(t) \ = f((a + v_{k-1}) + t\, h_k e_k)$ existiert $\theta_k \in \,]0, 1[$ mit

$$f(a + v_k) \ - f(a + v_{k-1}) \ = \ h_k \, \frac{\partial f}{\partial x_k} \, ((a + v_{k-1}) \ + \theta_k h_k e_k)$$

Da

$$\left| h_k \, \frac{\partial f}{\partial x_k} \, ((a + v_{k-1}) \ + \theta_k h_k e_k) \ - \ h_k \, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right| \ \le \ |h_k| \, \frac{\epsilon}{n}$$

erhält man

$$\begin{aligned} & \left| f(a + h) \ - f(a) \ - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \, h_k \right| \\ = & \left| \sum_{k=1}^{n} (f(a + v_k) \ - f(a + v_{k-1})) \ - \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \, h_k \right| \\ = & \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}((a + v_{k-1}) \ - \theta_k h_k e_k) \ - \ \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right) \ h_k \right| \ \le \ n \, \frac{\epsilon}{n} \, \sum_{k=1}^{n} |h_k| \\ \le & \ \epsilon \, \|h\|_2 \qquad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^n \ \text{ mit } \|h\|_2 \ < r. \end{aligned}$$

Das heißt f ist in a differenzierbar und $Df(a) \ = \text{grad } f(a)$.

Bleibt zu überlegen, daß $a \mapsto Df(a) \ = \text{grad } f(a)$ stetig ist. Dies ist aber klar, da jeder Eintrag $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ von grad f stetig in a ist. ◇

Bemerkung:

Wir wollen folgende Implikationen festhalten:

(i) $f : U \to \mathbb{R}^m, \ \ U \subseteq \mathbb{R}^n$ differenzierbar $\Longrightarrow \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ existieren.
Die Umkehrung gilt nicht.

(ii) $f : U \to \mathbb{R}^m, \ \ U \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ existieren und sind stetig.

Zahlreiche Beispiele für die Bestimmung von $Df(a)$ findet man in Blatt 13. Besonders wichtig sind die Übergänge zu krummlinigen Koordinaten, siehe Z35 im $\mathbb{R}^2$ und H46 im $\mathbb{R}^3$. Die Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ (siehe Z35) erhält man durch folgende Abbildung

$$\phi : U \ = \{(r, \varphi) \ \in \,]0, \infty[\, \times \,]0, 2\pi[\, \} \ \to \mathbb{R}^2$$

$$\phi(r, \varphi) \ = \ (r \cos\varphi, r \sin\varphi)^T$$

Wir wissen

$$d\phi(r, \varphi) \ = \ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad\qquad (r > 0, \ \ 0 < \varphi < 2\pi)$$

Nun ist $d\phi(r,\varphi)$ invertierbar (als Element von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ mit

$$(d\phi(r,\varphi))^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Es sollte nicht überraschen, daß $(d\phi(r,\varphi))^{-1}$ die Ableitung von der Abbildung $\phi^{-1} : S \to U$, $S = \phi(U) \;= \mathbb{R}^2\backslash\{(t,0) : t \ge 0\}$ S die an der positiven x-Achse geschlitzte Zahlenebene $\mathbb{R}^2$, ist.

$$\phi^{-1}(x,y) \;=\; (r, \operatorname{sign}(y)\arccos\frac{x}{r}), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

(Man beachte: $\phi\circ\phi^{-1} \;= \mathrm{id}_S$, $\phi^{-1}\circ\phi \;= \mathrm{id}_U$. Falls Φ^{-1} differenzierbar, so verwende Kettenregel). Dies ist ein Spezialfall folgender allgemeiner Situation.

Definition 13.24 *Seien V und W endlich-dimensionale, normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume. Eine bijektive Abbildung $\phi : U_1 \to U_2$, $U \subseteq V$ offen, $U_2 \subseteq W$ offen, heißt* **Diffeomorphismus**, *falls $\phi \in C^1(U_1)$ und für $\phi^{-1} : U_2 \to U_1$ ebenfalls gilt $\phi^{-1} \in C^1(U_2)$.*

Bemerkungen: Ist $\phi : U_1 \to U_2$ ein Diffeomorphismus von $U_1 \subseteq V$ auf $U_2 \subseteq W$, dann gilt:

(a) $\dim V \;=\; \dim W$.

(b) Für jedes $a \in U_1$ gilt für die Ableitungen $d\phi(a)$ und $d\phi^{-1}(b)$, $b = \phi(a)$, folgendes:

$$d\phi^{-1}(b) \;=\; (d\phi(a))^{-1}$$

Man hat nämlich $\phi^{-1}\circ\phi = \mathrm{id}_{U_1}$, $\phi\circ\phi^{-1} \;= \mathrm{id}_{U_2}$. Mit der Kettenregel (Satz 13.18) gilt

$$d\phi^{-1}(b)\; d\phi(a) \;=\; \mathrm{id}_V \qquad \text{und } d\phi(a)\; d\phi^{-1}(b) \;=\; \mathrm{id}_W$$

D.h. $d\phi^{-1}(b) \;= (d\phi(a))^{-1}$, sowie $\dim V \;=\; \dim W$.
Insbesondere ist für einen Diffeomorphismus $\phi : U_1 \to U_2$ jede Ableitung $d\phi(a)$ invertierbar in $\mathcal{L}(V,W)$. Folgender Satz besagt, daß die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildungen automatisch erfüllt ist.

Satz 13.25 *Sei $\phi : U_1 \to U_2$ eine bijektive Abbildung von $U_1 \subseteq V$ offen auf $U_2 \subseteq W$ offen. Ferner sei $\phi \in C^1(U_1)$ und $\phi^{-1} : U_2 \to U_1$ sei stetig. Sind alle Ableitungen $d\phi(a)$, $a \in U_1$, invertierbar in $\mathcal{L}(V,W)$, so ist $\phi^{-1} \in C^1(U_2)$, d.h. ϕ ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß ϕ^{-1} differenzierbar ist, und daß $b \mapsto d\phi^{-1}(b)$ stetig ist. Für den Nachweis der Differenzierbarkeit in $b = \phi(a)$ dürfen wir $a = 0$ und $b = \phi(a) = 0$ annehmen. Sonst betrachte man statt ϕ die Abbildung $x \mapsto \phi(x+a) - \phi(a)$. Eine weitere Reduktion des Problems erhalten wir durch folgende Überlegung: Betrachte $\psi := \; (d\phi(0))^{-1}\circ\phi : U_1 \to V$. ψ ist bijektiv, bildet U_1 auf eine offene Teilmenge von V ab (wegen Korollar 13.8), $\psi \in C_1(U_1)$ und ψ^{-1} ist stetig. Zusätzlich gilt $d\psi(0) = \mathrm{id}_V$ wegen der Kettenregel. Die Ableitungen $d\psi(a)$ sind invertierbar, da ja alle $d\phi(a)$ invertierbar vorausgesetzt sind. Hat man gezeigt, daß ψ^{-1} in 0 differenzierbar ist, so ist auch ϕ^{-1} in 0 differenzierbar (wegen $\phi^{-1} = \psi^{-1} \circ (d\phi(0))^{-1}$). Wir können also annehmen:

$$\phi(0) = 0, \qquad\qquad d\phi(0) = \mathrm{id}_V$$

Mit der Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$\phi(h) - \mathrm{id}_V\, h = R(h) \qquad \text{wobei } \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{R(h)}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$$

Sei $k \in V$ und $h = \phi^{-1}(k)$. $(*)$ schreibt sich nun

$$\phi^{-1}(k) - k = -(\phi(h) - h) = -R(\phi^{-1}(k)) \qquad (**)$$

Wir zeigen, daß gilt

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ k\neq 0}} \frac{-R(\phi^{-1}(k))}{\|k\|} = 0, \qquad\qquad (***)$$

was äquivalent dazu ist, daß ϕ^{-1} in 0 differenzierbar ist (und $d\phi^{-1}(0) = \mathrm{id}_V$). Da ϕ^{-1} auch stetig ist, gibt es mit $(*)$ Zahlen $r > 0,\ \delta > 0$ mit

$$\| R(h) \| \leq \frac{1}{2} \|h\| \qquad \text{für } \|h\| \leq r \quad \text{und}$$

$$\| \phi^{-1}(k) \| \leq r \qquad \text{für } \|k\| < \delta$$

Damit gilt

$$\| R(\phi^{-1}(k)) \| \leq \frac{1}{2} \| \phi^{-1}(k) \| \qquad \text{für } \|k\| < \delta$$

und mit $(**)$

$$\| \phi^{-1}(k) - k \| \leq \frac{1}{2} \| \phi^{-1}(k) \| \qquad \text{für } \|k\| < \delta$$

Folglich haben wir $\| \phi^{-1}(k) \| \leq 2\|k\|$ für $\|k\| < \delta$, und deshalb für $\|k\| < \delta,\ k \neq 0$

$$\frac{\| R(\phi^{-1}(k)) \|}{\|k\|} \leq \frac{2\ \| R(\phi^{-1}(k)) \|}{\| \phi^{-1}(k) \|} \to 0$$

mit $k \to 0$ (da $h = \phi^{-1}(k) \to 0$). Somit ist $(***)$ gezeigt.

Bleibt zu zeigen, daß $d\phi^{-1} : U_2 \to \mathcal{L}(W, V)$ stetig ist. Wie eben können wir $V = W$ annehmen. Wir wissen, daß $d\phi^{-1}(b) = (d\phi(a))^{-1}(a)$, $b = \phi(a)$ (vgl. Bemerkung (b)). Sei also $b_n \to b$ in U_2. Für $a_n = \phi^{-1}(b_n)$ gilt $a_n \to a$ in U_1, also $d\phi(a_n) \to d\phi(a)$ in $\mathcal{L}(V, W)$. Mit dem anschließenden Satz 13.26 gilt auch $(d\phi(a_n))^{-1} \to (d\phi(a))^{-1}$ in $\mathcal{L}(V, V)$, d.h. $d\phi^{-1}(b_n) \to d\phi^{-1}(b)$. ◇

Die Invertierbarkeit von $Df(a)$ hat im vorangehenden Satz eine große Rolle gespielt. Wir wissen, daß $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ mit der Operatornorm ein normierter Raum ist. Obwohl das folgende auch für unendlich-dimensionale Banachräume V richtig ist, schränken wir uns auf V endlich-dimensional ein. Da $\mathcal{L}(V)$ selber endlich-dimensional ist, ist $\mathcal{L}(V)$ vollständig, also ein Banachraum.

Satz 13.26 *Sei V endlich-dimensionaler normierter Raum. Dann gelten:*

(i) Ist $A \in \mathcal{L}(V)$, $\| A - id_V \| < 1$, so ist A invertierbar in $\mathcal{L}(V)$ und es gilt

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (id_V - A)^n \qquad \textit{(Konvergenz der Reihe in } \mathcal{L}(V))$$

$(B^0 := id_V)$

(ii) Die Menge $G = \{A \in \mathcal{L}(V) : A$ invertierbar$\}$ ist offen und die Abbildung $A \mapsto A^{-1}, G \to G$ ist stetig.

Beweis.

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\mathrm{id}_V - A)^n$ existiert in $\mathcal{L}(V)$, da $\| \mathrm{id}_V - A \| < 1$, siehe Übungen (T25, Blatt8, Analysis I) Bezeichne $s_m = \sum\limits_{n=0}^{m} (\mathrm{id}_V - A)^n$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} As_m &= (\mathrm{id}_V - (\mathrm{id}_V - A))\, s_m = s_m\, (\mathrm{id}_V - (\mathrm{id}_V - A)) \\ &= s_m - \sum_{n=1}^{m+1} (\mathrm{id}_V - A)^n = \mathrm{id}_V - (\mathrm{id}_V - A)^{m+1} \end{aligned}$$

Mit $m \to \infty$ folgt für $\tilde{A} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\mathrm{id}_V - A)^n : \quad A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = \mathrm{id}_V$.

(ii) Sei $A_0 \in G$ und $A \in \mathcal{L}(V)$ mit $\| A - A_0 \| < \dfrac{1}{\| A_0^{-1} \|}$. Dann gilt

$$\| \mathrm{id}_V - A_0^{-1} A \| = \| A_0^{-1}(A_0 - A) \| \leq \|A_0^{-1}\| \; \| A_0 - A \| < 1,$$

also $A_0^{-1} A \in G$, und es gilt mit (i)

$$(A_0^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{id}_V - A_0^{-1}A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_0^{-1}(A_0 - A))^n,$$

also

$$A^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_0^{-1}\,(A_0 - A) \right)^n \right) A_0^{-1}.$$

Insbesondere folgt aus eben Gezeigtem, daß G offen in $\mathcal{L}(V)$ ist. Mit

$$A^{-1} = A_0^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_0^{-1}\,(A_0 - A)^n)\, A_0^{-1},$$

gilt auch

$$\| A^{-1} - A_0^{-1} \| = \| \sum_{n=1}^{\infty} (A_0^{-1}\,(A_0 - A)^n)\, A_0^{-1} \|$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A_0^{-1}\|^n \; \| A_0 - A \|^n \right) \|A_0^{-1}\| = \|A_0^{-1}\| \frac{\|A_0^{-1}\| \; \| A_0 - A \|}{1 - \|A_0^{-1}\| \; \| A_0 - A \|}.$$

Daraus folgt die Stetigkeit von $A \mapsto A^{-1}$.

◇