Analysis I

Prof. Dr. R. Lasser

(WS 2000/01)

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitende Anmerkungen

Wesen:

Der Gegenstand der Mathematik ist schwer zu umgrenzen, jedenfalls schwieriger als der von Physik, Chemie oder Brauwissenschaft etc. Für Mathematik ist nicht ihr Gegenstand charakterisierend als vielmehr die Art des Schliessens. Von Ostrowski (Alexander Markowitsch Ostrowski: 1893-1986, Basel) stammt folgendes Zitat:

> "Jedesmal, wenn man aus einem endlichen, übersichtlich dargestellten System von scharf formulierten Prämissen logisch einwandfreie Schlüsse zieht, treibt man Mathematik."

Insofern ließe sich als Gegenstand der Mathematik alles beschreiben, was sich auf endlich viele scharf formulierte Grundtatsachen (Axiome) zurückführen läßt. Auf diesem Hintergrund erklären sich zumindest die Wesenszüge, die die Mathematik auszeichnen

- die Schärfe der Begriffsbildung
- die pedantische Sorgfalt im Umgang mit Definitionen
- die Strenge der Beweise
- die abstrakte Natur der mathematischen Objekte

Mathematische Symbole:

Um der lückenlosen Exaktheit und Klarheit zu genügen, hat sich eine Darstellung mathematischer Überlegungen entwickelt (math. Symbolik), die für Nichtspezialisten (bzw. nicht präzis und klar formulierende Personenkreise) schwer zugänglich ist. Hermann Weyl (1885-1955, Princeton) sagt:

> "Ein auffälliger Zug aller Mathematik, der den Zugang zu ihr dem Laien so sehr erschwert, ist der reichliche Gebrauch von Symbolen".

Der mathematische Formalismus ist kein überflüssiges "Glasperlenspiel". Die komplexen Zusammenhänge, die höchsten Grad präziser Beschreibung bedürfen, lassen sich verbal und romanhaft nicht mehr darstellen. (Ein schönes Beispiel findet man in der Einleitung im Buch von H.Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1).

Nimmt man die Erfolge der großen Mathematiker der Vergangenheit (z.B. Newton, Leibniz, Gauß, Euler usw.) und die Anforderungen an die Mathematik heutzutage, so lassen sich orientiert um die eigentliche mathematische Methodik folgende weitere Aufgaben erkennen:

- präzise Abstraktion naturwissenschaftlicher, ingenieurwissenschaftlicher oder ökonomischer Abläufe in mathematische Begriffe (mathematische Modellbildung)
- begleitende höchst-rechnerintensive Untersuchungen (numerische Simulation)

Letzteres ist eine Entwicklung der letzten Jahre, erst ermöglicht durch die Verfügbarkeit leistungsfähiger Computer. In diesem Zusammenhang sollten die numerischen Künste der großen Mathematiker (insbesondere Gauß) der Vergangenheit besonders erwähnt werden.

Da wir uns in den nächsten zwei Jahren in dieser Veranstaltung mit Analysis, d.h. im wesentlichen mit Infinitesimalrechnung befassen, wollen wir noch einen sehr kurzen Blick in die Historie wagen. Die zentralen ersten Entwicklungspunkte werden Newton (Isaac Newton, 1643-1727, London) und Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716, Hannover, Berlin) zugeschrieben. Natürlich findet man bereits bei Archimedes, Kepler, Cavalieri, Fermat, Pascal, Wallis, Huygens, Toricelli, Descartes Vorläufer analytischer Methodik.

Folgendes scheint klar zu sein:

Die beiden Symbole "d" und "$\int$" wurden am 29. Oktober 1675 (also bald 325-jähriges Jubiläum!) von Leibniz zum erstenmal verwendet. Der Blick von Leibniz galt grob gesprochen dem Tangentenproblem und der Quadratur (Flächeninhaltberechnung)

$$dv = v' dx$$

Newton hingegen entwickelte die Differential- und Integralrechnung innerhalb der "Fluxionsrechnung". Dabei sind alle Größen zeitabhängig (z.B. $x = x(t)$). Die "Fluxion" bezeichnet dann $\dot{x}$, die Ableitung nach t.

1699 entstand der Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz. Leibniz wurde vorgeworfen, die Differentialrechnung nicht selbständig erfunden, sondern von Newton "entlehnt" zu haben. Bis 1710 wurden Argumente ausgetauscht. 1710 schließlich sprach sich eine eigens eingesetzte Kommission dahingehend aus, daß Newton der erste Erfinder der Infinitesimalrechnung ist. Leibniz und Newton blieben auch aus politischen Gründen zerstritten. Erst im 19. Jahrhundert setzte sich durch, daß Leibniz und Newton unabhängig voneinander den Grundstock zur Analysis gelegt haben.

Bücher, Skripten:

Königsberger: Analysis 1, Springer
Forster: Analysis 1, Vieweg
Leutbecher: Analysis 1-4 (TUM-Skriptum)

1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Wir setzen die **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ als gegeben voraus. Das Rechnen in $\mathbb{N}$ - wie wir es vom Alltag gewohnt sind - wird hier nicht neu definiert, bestenfalls formalisiert. Eine wichtige Beweismethode, die auf den Grundeigenschaften von $\mathbb{N}$ beruht, ist die **vollständige Induktion**.

Induktionsprinzip: Ist M eine Menge mit den Eigenschaften

(i) $1 \in M$ (1 Element von M)

(ii) $n \in M \Longrightarrow n + 1 \in M$ (Ist $n \in M$, so auch $n + 1 \in M$),

so gilt $\mathbb{N} \subseteq M$ ($\mathbb{N}$ ist Teilmenge von M).

Aus dem Induktionsprinzip leitet sich die vollständige Induktion ab.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion: Jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ (exakt) zugeordnet (die richtig oder falsch sein kann). Gelten

(i) "$A(1)$ ist richtig" (Induktionsanfang)

(ii) "$A(n)$ ist richtig" $\Longrightarrow A(n + 1)$ ist richtig (Induktionsschritt),

so gilt "$A(n)$ ist richtig" für alle $n \in \mathbb{N}$.

Man setze $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist richtig } \}$ und wende das Induktionsprinzip an.

Bemerkung:

(a) Gelegentlich wird auch 0 zu den natürlichen Zahlen gerechnet. Wir bezeichnen $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Der Induktionsanfang wird durch 0 bestimmt. Ist $A(n)$ für $n \geq n_1$ erklärt; $n, n_1 \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen ($\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$), so kann vollständige Induktion sinngemäß auch hier angewendet werden: (i) "$A(n_1)$ ist richtig" (ii) "$A(n)$ richtig" $\Rightarrow$ "$A(n + 1)$ richtig" für $n \geq n_1$.

(b) Das Induktionsprinzip eignet sich zur rekursiven Definition, indem man (i) (Induktionsanfang) und (ii) (Induktionsschritt) angibt. Beispielsweise (mit den Rechengesetzen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$)

$$\text{(Summe)} \quad \sum_{k=1}^{1} a_k := a_1, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

$$\text{(Produkt)} \quad \prod_{k=1}^{1} a_k := a_1, \qquad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1} \qquad (a_k \in \mathbb{R})$$

$$\text{(Fakultät)} \quad 0! := 1, \qquad (n + 1)! := n!(n + 1)$$

$$\text{(Pochhammer-Symbol)} \quad (a)_0 := 1, \qquad (a)_{n+1} := (a)_n(a + n) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Ein einfaches Beispiel für einen Beweis mit vollständiger Induktion:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1) \tag{1.1}$$

Beweis. Induktionsanfang: $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$

Induktionsschritt: Sei $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ richtig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &= \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1) = (n+1)\left(\frac{1}{2} n + \frac{2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

◇

Analog zeigt man

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \tag{1.2}$$

Weitere Identitäten werden in den Übungen hergeleitet. Wichtig ist die vollständige Induktion in der Kombinatorik.

Bemerkung. Die zu beweisende Identität muß "vermutet" werden und wird durch vollständige Induktion bewiesen.

Satz 1.1 *Die Zahl aller möglichen Anordnungen einer Menge $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ mit n Elementen ist gleich $n!$*

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 1$, d.h. $\{a_1\}$, gibt es nur eine Anordnung.

Induktionsschritt: Gelte die Behauptung für Mengen mit n Elementen. Betrachte die Menge $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Teile die sämtlichen Anordnungen dieser Menge ein in $n + 1$ "Klassen", die jeweils $a_1, a_2, ...$ bzw. a_{n+1} als erstes Element haben. In jeder Klasse finden sich Mengen, bei denen die restlichen n Elemente beliebig angeordnet sind. Also gibt es in jeder Klasse (mit der Annahmen, daß die Behauptung für n-elementige Mengen gilt) $n!$ Anordnungen. Insgesamt gibt es also für $\{a_1, ..., a_{n+1}\}$ genau $n!(n + 1)$ Anordnungen.

◇

Für eine gleichwertige Aussage benötigen wir etwas mathematische Terminologie.

Seien A und B Mengen. Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt **injektiv** (oder eineindeutig, 1 - 1), falls für $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ gilt $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$. $\varphi : A \to B$ heißt **surjektiv** (auf B), falls zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $\varphi(a) = b$. (abgekürzt mit Logik-Symbolen: $\forall b \in B \;\; \exists a \in A : \varphi(a) = b$).

$\varphi : A \to B$ heißt **bijektiv**, falls φ injektiv und surjektiv ist. Ist $A = B$, so werden bijektive Abbildungen auch **Permutationen** genannt.

Satz 1.1' *Sind A und B Mengen mit jeweils n Elementen, so gilt: Es gibt genau $n!$ bijektive Abbildungen von A auf B. Insbesondere gibt es genau $n!$ Permutationen einer Menge A mit n Elementen.*

Zum Nachweis von Satz 1.1' beachte man, daß zu einer Anordnung von $A = \{a_1, ..., a_n\}$ genau eine bijektive Abbildung

$$\varphi : \{a_1, ..., a_n\} \longrightarrow \{b_1, ..., b_n\} = B$$

gehört.

Bemerkung: $n!$ wächst extrem schnell mit n. Beispielsweise ist $13! = 6\ 222\ 020\ 800 \approx 6.2 \times 10^9$. Aus Satz 1.1 kann man folgern: Kann man in einer Minute etwa 100 Permutationen von $\{a_1, ..., a_{13}\}$ aufzählen, so braucht man ungefähr 100 Jahre, um alle Permutationen aufzuzählen!

Die **Binomialkoeffizienten** werden folgendermaßen definiert.
Für $n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= 0 && \text{für } k > n \\ \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{für } 0 \le k \le n \end{aligned} \tag{1.3}$$

Man sieht sofort:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$$

Beachte: $\displaystyle \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \le k \le n$.

Proposition 1.2 *Es gilt die Identität des Pascalschen Dreiecks, d.h. für $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1.4}$$

Beweis. Für $k > n$ hat man in (1.4) links und rechts vom Gleichheitszeichen die Null. Für $k = n$ hat man in (1.4) beiderseits die Eins. Ist $0 \le k < n$, so folgt mit (1.3)

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(k+1)n! + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

$\diamond$

Pascal, Blaise (1623-1662, Paris)

Man kann die Binomialkoeffizienten auch rekursiv (über k, bei festem n) definieren:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} \tag{1.5}$$

Satz 1.3 *Sei $A = \{a_1, ..., a_n\}$ eine Menge mit n Elementen. Es gibt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von A, die aus k Elementen bestehen. (0-elementige Teilmengen entsprechen der leeren Menge).*

Beweis. Induktion über n : Bezeichne $b(n,k)$ die Anzahl k-elementiger Teilmengen von A.

Induktionsanfang: $n = 1$. $b(1,0) = 1 = \binom{1}{0}$,
$b(1,1) = 1 = \binom{1}{1}$ und $b(1,k) = 0 = \binom{1}{k}$ für $k > 1$.

Induktionsschritt: Es gelte $b(n,k) = \binom{n}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Sei nun $A = \{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Wieder gilt:
$b(n+1,0) = 1 = \binom{n+1}{0}$, $b(n+1,n+1) = 1 = \binom{n+1}{n+1}$, $b(n+1,k) = 0 = \binom{n+1}{k}$ für $k > n+1$. Sei $0 \leq k \leq n-1$.

Die $(k+1)$-elementigen Teilmengen von A zerfallen in zwei Klassen, je nach dem, ob sie a_{n+1} enthalten oder nicht. Die Anzahl derjenigen $(k+1)$-elementigen Teilmengen, die a_{n+1} nicht enthalten, ist gleich der Anzahl der $(k+1)$-elementigen Teilmengen von $\tilde{A} = \{a_1, ..., a_n\}$, also gleich $b(n,k+1)$. Die Anzahl derjenigen $(k+1)$-elementigen Teilmengen, die a_{n+1} enthalten, entspricht der Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\tilde{A} = \{a_1, ..., a_n\}$, ($a_{n+1}$ ist fixiert in den Teilmengen enthalten), also gleich $b(n,k)$. Damit folgt

$$b(n+1,k+1) = b(n,k) + b(n,k+1) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$\diamond$

Bemerkung: Formel (1.4) beschreibt die Berechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ im Pascalschen Dreieck:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Korollar 1.4 (Binomischer Lehrsatz) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0,\ x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(x+y)^n \ = \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{1.6}$$

(Dabei ist $x^0 = 1$).

Beweis. Für $n = 0, n = 1$ gilt (1.6). Sei $n > 1$. Beim Ausmultiplizieren der n Klammern $(x+y)(x+y)...(x+y)$ entsteht eine Summe mit Summanden $x^k y^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n$, wobei diese Summanden mehrfach auftreten können. Die Potenz x^k tritt genau so oft auf, wie man Teilmengen von k Klammern aus n Klammern auswählen kann, also $\binom{n}{k}$ mal. Damit lassen sich die $x^k y^{n-k}$, $(n, k$ fest) zusammenfassen zu $\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. ◇

Bemerkung: Es gibt für einen Sechser im Lotto gleich $\binom{49}{6} = 13\ 983\ 816$ verschiedene Möglichkeiten.

Anwendung: Zuteilung von Prozessoren für parallele Bearbeitung von Teilprozeduren (auch Heiratssatz genannt).

Problem: Unter welchen Voraussetzungen existiert eine injektive Zuordnung von den Prozeduren an die Prozessoren, die Bearbeitbarkeit berücksichtigt. (Unter welchen Voraussetzungen existiert eine injektive Zuordnung – Heirat – (injektiv $\cong$ monogam), die die Freundschaften berücksichtigt.

Mathematische Formulierung des Problems:

Sei $A = \{a_1, ..., a_n\}$ die Menge der Prozeduren (Herren), und $B = \{b_1, ..., b_m\}$ die Menge der Prozessoren (Damen). Jedem $a \in A$ ist eine Teilmenge $\emptyset \neq B(a) \subseteq B$ zugeordnet, die Menge der Prozessoren, die Job a bearbeiten können. ($B(a)$ ist die Menge der Freundinnen von a).

Gesucht ist eine Abbildung $\varphi : A \to B$ mit

(i) φ ist injektiv, d.h. zwei Jobs werden nicht einem Prozessor zugeordnet.

(ii) $\varphi(a) \in B(a)$ für alle $a \in A$; d.h. es werden nur die Prozessoren zugeordnet, die die jeweiligen Jobs bearbeiten können.

Problem: Unter welchen Voraussetzungen existiert ein solches φ (φ wird auch Heirat genannt).

Heiratssatz: Seien A und B wie vorher, und $\emptyset \neq B(a) \subseteq B$ für alle $a \in A$ beliebig vorgegeben. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Es existiert eine Abbildung $\varphi : A \to B$, die (i) und (ii) erfüllt (d.h. es existiert eine Heirat φ).

(b) Es gilt $\#(B(M)) > \#(M)$ für alle Teilmengen $M \subseteq A$,, wobei $B(M) = \bigcup_{a \in M} B(a)$ und $\#(M)$ die Anzahl der Elemente aus M bezeichnet.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) : Gibt es eine Heirat φ, so sind für jedes M in $B(M)$ mindestens $\#(M)$ Prozessoren enthalten (wegen der Injektivität). Also gilt $\#(M) \leq \#(B(M))$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Zeigen wir mit vollständiger Induktion nach $n = \#(A)$.

(A) $n = 1$:
Mit Voraussetzung existiert mindestens ein Prozessor, der diesen einen Job bearbeiten kann. Ordne einfach einen dieser Prozessoren zu.

(S) $n \to n+1$:
Wir unterscheiden zwei Fälle

1. Fall: Es gilt $\#(B(M)) > \#(M)$ für alle Teilmengen $M \subseteq A$, $\emptyset \neq M \neq A$. Wähle ein Element $a_0 \in A$ aus und definiere $\varphi(a_0) = b_0$, wobei $b_0 \in B(a_0)$ fest gewählt wird. Für $\tilde{A} = A \backslash \{a_0\}$ und $\tilde{B} = B \backslash \{b_0\}$ gilt: Die Zuordnung von Prozessoren $B(a)$, die den Job $a \in \tilde{A}$ bearbeiten können und in $\tilde{B}$ liegen, erfüllen $\#(B(M)) \geq \#(M)$ (es ist ja nur ein Prozessor b_0 verloren gegangen). Mit Induktion existiert $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ mit $\tilde{\varphi}(a) \in B(a)$. Nun setze

$$\varphi : A \longrightarrow B, \qquad \varphi(a) \;=\; \begin{cases} \varphi(a_0) & \text{für } a = a_0 \\ \tilde{\varphi}(a) & \text{für } a \in \tilde{A} \end{cases}$$

φ ist eine Heirat.

2. Fall: Es gilt für $M_0 \subseteq A$, $\emptyset \neq M_0 \neq A$: $\#(B(M_0)) = \#(M_0)$. Man teilt A auf in M_0 und $A \backslash M_0$. Mit Induktionsvoraussetzung existiert eine Heirat $\varphi : M_0 \to B(M_0)$ von M_0 auf $B(M_0)$. Auf $A \backslash M_0$ und $B \backslash B(M_0)$ kann man ebenso die Induktion anwenden, falls gezeigt ist, daß (2) entsprechend für das Teilproblem gilt. Wir nehmen an, daß (2) für das Teilproblem nicht gilt, d.h. es existiert $M_1 \subseteq A \backslash M_0$ mit $\#(B(M_1) \backslash B(M_0)) < \#(M_1)$. Dann gilt aber $\#(B(M_0 \cup M_1)) = \#(B(M_0)) + \#(B(M_1) \backslash B(M_0)) < \#(M_0) + \#(M_1) = \#(M_0 \cup M_1)$ im Widerspruch zu (2).

$\diamond$

2 Die reellen Zahlen und Vollständigkeit

$\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ haben wir bereits kennengelernt. Die Rechenoperationen (Addition und Subtraktion) erweitert man auf Brüche $\frac{m}{n}$, auf reelle Zahlen und komplexe Zahlen.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \, m \in \mathbb{Z}, \, n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$, $\mathbb{R}$ steht für die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{C}$ für die komplexen Zahlen.

In $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ hat man

Definition 2.1 *Sei K eine Menge (mit mindestens 2 Elementen), auf der zwei Abbildungen*

$$+ : \; K \times K \longrightarrow K \qquad \textit{und} \qquad \bullet : \; K \times K \longrightarrow K$$

die Addition und die Multiplikation gegeben sind, so daß gilt:

(K1) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in K$ **(Assoziativität)**

(K2) $\exists$ *ein* **neutrales Element** $0 \in K$ *der Addition mit der Eigenschaft* $0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in K$

(K3) $\forall a \in K \; \exists$ *ein* **inverses Element** $-a \in K$ *bzgl. der Addition, so daß* $a + (-a) = 0$

(K4) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$ **(Kommutativität)**

(K5) $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in K$ **(Assoziativität)**

(K6) $\exists$ *ein* **neutrales Element** $1 \in K$ *der Multiplikation, so daß* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in K$

(K7) $\forall a \in K, \; a \neq 0 \; \exists$ *ein* **inverses Element** $a^{-1} \in K$ $(a^{-1} = \frac{1}{a})$ *bzgl. der Multiplikation, so daß* $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ *gilt*

(K8) $ab = ba \quad \forall a, b \in K$ **(Kommutativität)**

(K9) $a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in K$ **(Distributivität)**

Dann heißt K **kommutativer Körper**.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ sind keine Körper. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (und $\mathbb{C}$ siehe später) sind kommutative Körper (mit den gewohnten Operationen). Der Begriff Körper wird in der linearen Algebra genauer untersucht.

$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ (nicht $\mathbb{C}$) zeichnen sich dadurch aus, daß auf ihnen eine Anordnung gegeben ist. (Auch $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind angeordnet).

Definition 2.2 *Sei K ein kommutativer Körper. K heißt* **archimedisch angeordneter Körper**, *falls in K die Teilmenge der* **positiven Elemente** *(Schreibweise für $a \in K$ positiv ist "$a > 0$") ausgezeichnet ist, mit folgenden Eigenschaften*

(A1) Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der drei Bedingungen
$a > 0$ oder $a = 0$ oder $-a > 0$.

(A2) Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgen $a + b > 0$ und $ab > 0$.

(A3) Zu $a > 0,\ b > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß
$na := \underbrace{a + a + ... + a}_{n-mal} > b$ gilt (Archimedisches Axiom).

Bemerkung:

(1) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind archimedisch angeordnete Körper.

(2) Ist $-a > 0$, so heißt a negativ und man schreibt $a < 0$.
Ist $a - b > 0$, so heißt a größer als b und man schreibt $a > b$.
$a \geq b$ bezeichnet $a > b$ oder $a = b$.
$a < b$ bezeichnet $b > a$.
$a \leq b$ bezeichnet $a < b$ oder $a = b$.

(3) Einfache Folgerungen von (A1), (A2):

(i) $a < b,\ b < c \Longrightarrow a < c$ (Transitivität)
(denn: $(b - a) + (c - b) = c - a$ und (A2) impliziert $c - a > 0$)

(ii) $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$ für alle $c \in K$
(denn: $(b + c) - (a + c) = b - a$)

(iii) $a < b,\ c > 0 \Longrightarrow ca < cb$
(denn: $cb - ca = c(b - a)$)

(iv) $a > b > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ $\quad (\frac{1}{a} := a^{-1})$
(denn wäre $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$, so folgt mit (iii)
$0 \leq ab\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = b - a$ im Widerspruch zu $a > b$)

(v) $0 \leq a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$
(denn: $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$)

(vi) Für $a \neq 0$ gilt $a^2 > 0$
(Mit (v) ist nur $a < 0$ zu betrachten. Mit $-a > 0$ folgt $a^2 = (-a)^2 > 0$)

Satz 2.3 (Bernoulli-Ungleichung) *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Für $x \geq -1,\ x \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{2.1}$$

(Anmerkung: Axiom (A3) wird nicht benötigt.)

Beweis. (Mit vollständiger Induktion über n) Für $n = 1$ hat man Gleichheit. Gelte nun (2.1) für $n \in \mathbb{N}$. Dann hat man

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \underset{\text{(iii)}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$$

$$\underset{\text{(vi)}}{\geq} 1 + (n+1)x$$

◇

Bemerkung: Es gibt eine Reihe von Mathematikern mit Namen Bernoulli. Obige Ungleichung stammt von Jakob Bernoulli I (1654-1705, Basel).

Mit dem archimedischen Axiom folgt:

Satz 2.4 *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gelten ($b, q, M, \epsilon \in K$):*

(a) Ist $b > 1$, so gibt es zu jeder Schranke $M > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $b^n > M$. ($b^n = \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n-mal}$)

(b) Ist $0 < q < 1$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $q^n < \epsilon$.

Beweis.

(a) Setze $x = b - 1 > 0$. Mit Satz 2.3 gilt $b^n = (x+1)^n \geq 1 + nx$. Mit (A3) gibt es zu $M > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $nx > M$. Zusammengefaßt gilt:

$$b^n \geq 1 + nx > 1 + M > M.$$

(b) Folgt aus (a), indem man $b = q^{-1}$ und $M = \epsilon^{-1}$ setzt.

◇

Bemerkung: Es gibt angeordnete kommutative Körper (mit (A1), (A2)), die nicht archimedisch sind.

In jedem (archimedisch) angeordneten Körper K kann man einen **Absolutbetrag** einführen.

Für $a \in K$ setzt man

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Es gelten folgende Regeln:

(1) $|ab| \;=\; |a|\,|b|$

(2) $|a+b| \;\leq\; |a| + |b|$ und $|\,|a| - |b|\,| \;\leq\; |a-b|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. (von (5)): Es gelten $\pm a \leq \; |a|$, $\pm b \leq \; |b|$, und damit $a+b \leq \; |a|+|b|$ und $-(a+b) \leq \; |a|+|b|$. Das heißt $|a+b| \;\leq\; |a|+|b|$. Die zweite Ungleichung folgt mit $|a| \;=\; |a-b+b| \leq \; |a-b|+|b|$ und $|b| \;=\; |b-a+a| \;\leq\; |b-a|+|a| \;=\; |a-b|+|a|$. Damit gilt $\pm(|a|-|b|) \;\leq\; |a-b|$. $\diamond$

Bisher haben wir Eigenschaften untersucht, die sowohl für $\mathbb{Q}$ als auch für $\mathbb{R}$ gelten. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ unterscheiden sich hinsichtlich der Vollständigkeit.

Wie üblich bezeichne in einem (archimedisch) angeordneten kommutativen Körper K für $a \leq b$:

$$[a,b] := \;\{x \in K:\; a \leq x \leq b\} \qquad [a,b[\; := \;\{x \in K:\; a \leq x < b\}$$
$$]a,b] := \;\{x \in K:\; a < x \leq b\} \qquad]a,b[\; := \;\{x \in K:\; a < x < b\}$$

die durch a und b bestimmten abgeschlossenen, halboffenen und offenen **Intervalle**. Ist I eines dieser Intervalle, so bezeichnet $|I| \;= b-a$ die Länge von I.

Definition 2.5 *Sei K ein (archimedisch) angeordneter kommutativer Körper. Eine* **Intervallschachtelung** *ist eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit*

(i) $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(d.h. $a_1 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq ... \leq b_{n+1} \leq b_n \leq ... \leq b_1$).

(ii) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| \;= b_n - a_n < \epsilon$.

K heißt **vollständig***, falls zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau ein $x \in K$ existiert, so daß $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Bemerkungen:

(1) Es gibt weitere äquivalente Charakterisierungen der Vollständigkeit. Obige geht auf Karl Weierstraß (1815-1897, Berlin) zurück.

(ii) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen vollständigen archimedisch angeordneten kommutativen Körper. Diese Eigenschaften charakterisieren $\mathbb{R}$, d.h. (K1),...,(K9), (A1), (A2), (A3) und Vollständigkeit legen $\mathbb{R}$ fest. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig. Wir werden gleich feststellen, daß in $\mathbb{R}$ stets Wurzeln existieren, in $\mathbb{Q}$ nicht. Wir werden uns künftig, wenn Aussagen über $\mathbb{R}$ hergeleitet werden, letztendlich nur auf die obig genannten Gesetze (Axiome) stützen.

Satz 2.6 (Existenz von Wurzeln) *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert genau eine reelle Zahl $y > 0$ mit $y^k = x$.*

Man schreibt $y = \sqrt[k]{x}$ oder $y = x^{1/k}$.

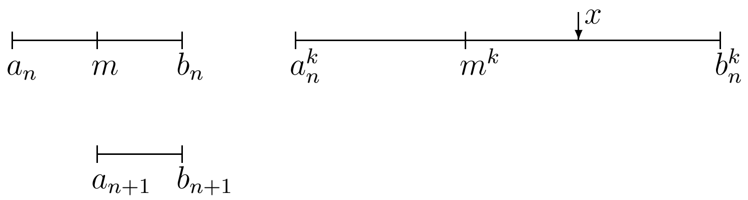
Beweis. Sei $x \geq 1$, $k \geq 2$. Wir konstruieren rekursiv eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ mit

$$(*) \qquad a_n^k \leq x \leq b_n^k \quad \text{und } |I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |I_1| \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Wir starten mit
$$I_1 = [a_1, b_1] = [1, x+1]$$
(beachte: wegen $x \geq 1$ gilt $b_1^k = (x+1)^k \geq x^k \geq x \geq 1^k = a_1^k$)

Den Induktionsschritt führt man mit Intervallteilung. Ist $I_n = [a_n, b_n]$ mit $(*)$ gegeben, so setze $m := \frac{1}{2}(a_n + b_n) = a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

Wir setzen
$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, m] & \text{falls } m^k \geq x \\ [m, b_n] & \text{falls } m^k < x \end{cases}$$



Mit der Konstruktion sind obige Eigenschaften $(*)$ auch für I_{n+1} erfüllt. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung, denn $I_{n+1} \subseteq I_n$. Ferner gibt es mit Satz 2.4(b) zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \epsilon$, also $|I_n| < \epsilon$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{y\}$ mit einem $y \in \mathbb{R}$.

Wir zeigen $y^k = x$. Dazu beachte man, daß $I_n^k = [a_n^k, b_n^k]$ ebenfalls eine Intervallschachtelung ist. Es gilt nämlich $I_{n+1}^k \subseteq I_n^k$ (da $I_{n+1} \subseteq I_n$) und

$$|I_n^k| = b_n^k - a_n^k = (b_n - a_n)(b_n^{k-1} + b_n^{k-2} a_n + \ldots + a_n^{k-1}) \leq |I_n| k b_1^{k-1}$$

Ist nun $\epsilon > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \dfrac{\epsilon}{k b_1^{k-1}}$, also $|I_n^k| < \epsilon$.
Nun ist $x \in I_n^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (mit $(*)$) und $y^k \in I_n^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (mit $y \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Es gibt genau ein Element in $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n^k$, d.h. $y^k = x$.

Die Eindeutigkeit von $y > 0$ mit $y^k = x$ erhält man folgendermaßen:
Ist $z > 0$, $z^k = x$ und $y < z$ (o.E.), so ist $x = y^k < z^k = x$ ein Widerspruch.

Schließlich bleibt der Fall $0 < x < 1$. Für $\dfrac{1}{x}$ gibt es ein $y > 0$ mit $y^k = \dfrac{1}{x}$, also $x = \dfrac{1}{y^k} = \left(\dfrac{1}{y}\right)^k$. $\diamond$

In $\mathbb{Q}$ kann man nicht Wurzeln jeder Zahl ziehen. Zum Beispiel ist $\sqrt{2}$ nicht rational. Angenommen, es wäre $x \in \mathbb{Q},\ x^2 = 2$, so schreibe $x = \dfrac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}$, mit gekürztem Bruch. Dann gilt $q^2 \cdot 2 = p^2$. Also enthält p die Zahl 2 als Faktor, d.h. $p = 2r,\ r \in \mathbb{Z}$. Folglich $q^2 \cdot 2 = p^2 = 4r^2$ und dann $q^2 = 2r^2$. Somit enthält q auch 2 als Faktor; aber $\dfrac{p}{q}$ ist gekürzt: Widerspruch.

Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Menge reeller Zahlen, so heißt $b \in \mathbb{R}$ **obere Schranke** (bzw. **untere Schranke**) von A, falls $a \leq b$ für alle $a \in A$ (bzw. $a \geq b$ für alle $a \in A$) gilt. Besitzt A eine obere Schranke, so heißt A nach oben beschränkt. Entsprechend definiert man nach unten beschränkt. Gilt beides, so nennt man A beschränkt.

Liegt eine obere Schranke (bzw. untere Schranke) von A sogar in A selbst, so heißt diese Maximum von A (i.Z. $b = \max A$) (bzw. Minimum von A (i.Z. $b = \min A$)). Beachte: $\min A$ und $\max A$ sind eindeutig bestimmt wegen (A1) (wenn sie existieren).

Definition 2.7 *Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt* **Supremum** *einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, falls*

(i) s ist obere Schranke von A

und

(ii) für jede obere Schranke t von A gilt $t \geq s$.

Das heißt: s ist die kleinste obere Schranke von A. Man schreibt $s = \sup A$.

Entsprechend definiert man s als das **Infimum** *von $A \subseteq \mathbb{R}$, falls*

(i) s ist untere Schranke von A

(ii) für jede untere Schranke t von A gilt $t \leq s$.

Das heißt: s ist die größte untere Schranke von A. Man schreibt $s = \inf A$.

Bemerkung: $\sup A$ und $\inf A$ brauchen nicht immer zu existieren. (Zur Existenz vergleiche nachfolgenden Satz). Existiert $\sup A$ (bzw. $\inf A$), so ist es eindeutig bestimmt. (Sind s und $\tilde{s}$ zwei Suprema von A, so muß $s \leq \tilde{s}$ und $\tilde{s} \leq s$ gelten, also $s = \tilde{s}$).

Satz 2.8 *Jede nach oben (bzw. nach unten) beschränkte nichtleere Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).*

Beweis. Wir studieren nur den Fall, daß A nach oben beschränkt ist. Dazu konstruieren wir rekursiv eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}},\ I_n = [a_n, b_n]$ mit den Eigenschaften

(i) $b_{n+1} - a_{n+1} \;=\frac{1}{2}(b_n - a_n) \qquad (\Rightarrow |I_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |I_1|)$

(ii) b_n ist obere Schranke von A

(iii) a_n ist keine obere Schranke von A

Wir beginnen mit $I_1 = [a_1, b_1]$, wobei b_1 eine beliebige obere Schranke von A ist, $a_1 \in \mathbb{R}$ keine obere Schranke (z.B. $a_1 = \alpha - 1;\ \alpha \in A$ irgend ein Element von A).

Seien $I_1 = [a_1, b_1], ...,\ I_n = [a_n, b_n]$ bereits gefunden, so daß (i), (ii) und (iii) gelten. Setze $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

Offensichtlich gilt $a_n \leq m_n \leq b_n$. Nun setze

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, m_n] & \text{falls } m_n \text{ obere Schranke von } A \\ [m_n, b_n] & \text{falls } m_n \text{ keine obere Schranke von } A \end{cases}$$

Damit gelten: $I_{n+1} \subseteq I_n$, $\;b_{n+1}$ ist obere Schranke von A und a_{n+1} ist keine obere Schranke von A. Ferner gilt $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$. Ist nun $\epsilon > 0$, so existiert mit Satz 2.4(b) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < \dfrac{\epsilon}{b_1 - a_1}$. Folglich ist $|I_n| < \epsilon$, und damit ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Bezeichne (wegen der Vollständigkeit)

$$\{s\} \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Wir zeigen $s = \sup\, A$. Dazu hat man nachzuweisen:

(a) s ist obere Schranke von A, und

(b) s ist kleinste obere Schranke von A.

zu (a): Angenommen es gäbe $x \in A$ mit $s < x$. Dann existiert zu $\epsilon := x - s$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < \epsilon = x - s$. Da aber $s \in [a_n, b_n]$ gilt $b_n - s \leq b_n - a_n < x - s$, und damit $b_n < x$ im Widerspruch dazu, daß b_n obere Schranke von A ist.

zu (b): Angenommen $\tilde{s}$ ist obere Schranke von A, und $\tilde{s} < s$. Dann existiert zu $\epsilon := s - \tilde{s}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < \epsilon = s - \tilde{s}$. Da $s \in [a_n, b_n]$ gilt nun $s - a_n \leq b_n - a_n < s - \tilde{s}$, d.h. $a_n > \tilde{s}$. Damit gilt aber $a_n > \tilde{s} \geq x$ für alle $x \in A$, d.h. a_n ist obere Schranke von A, ein Widerspruch.

Damit ist gezeigt, daß $s = \sup\, A$. ◇

Beispiel: Die **Eulersche Zahl** e.

Sei $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Offensichtlich ist $a_n < b_n$. Mit (H6,a) gilt $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_{n+1} \leq b_n$. Folglich haben wir $I_{n+1} \subseteq I_n$, wobei $I_n = [a_n, b_n]$.
Mit (H6,a) gilt auch $a_n \leq 3$, und damit

$$b_n - a_n = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) - a_n \;=\; a_n\frac{1}{n} \;\leq 3\frac{1}{n}$$

Folglich ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Man bezeichnet

$$\{e\} \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Eine Näherung (im Dezimalsystem) für e ist

$$e \approx 2.71828182845904523536...$$

Folgende Rechenregeln sind nützlich und sollten teilweise ohne weiteres hergeleitet werden können (siehe Übungsaufgaben).

Proposition 2.9 *Seien A, B nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann gelten:*

(a) Ist $A \subseteq B$, so gilt $\sup A \leq \sup B$

(b) Bezeichnen $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$, $rA = \{ra : a \in A\}$ für $r \in \mathbb{R}$ und $A \cdot B = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$, so hat man

$$\sup(A+B) \;=\; \sup A + \sup B$$

$$\begin{aligned} \sup(rA) \;&=\; r\sup A, \qquad && \textit{falls } r \geq 0 \\ \sup(A\cdot B) \;&=\; \sup A \cdot \sup B, \qquad && \textit{falls } A, B \subseteq [0, \infty[\ . \end{aligned}$$

(Entsprechende Aussagen gelten für das Infimum, falls A und B nach unten beschränkt sind).

Beweis.

(a) (wird hier nicht vorgeführt)

(b) Wir führen nur den Beweis zur Summe. Sei $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$. Da $a \leq \alpha\ \forall a \in A$ und $b \leq \beta\ \ \forall b \in B$ folgt $a + b \leq \alpha + \beta\ \ \forall a \in A, b \in B$, d.h. $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$.

Mit der Definition des Supremums existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $a_0 \in A$ und ein $b_0 \in B$ mit $a_0 > \alpha - \frac{\epsilon}{2}$ und $b_0 > \beta - \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist $a_0 + b_0 > (\alpha + \beta) - \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig klein sein darf, ist $\alpha + \beta$ die kleinste obere Schranke von $A + B$.

$\diamond$

Wir schließen diesen Abschnitt über $\mathbb{R}$ mit einigen Resultaten zur Lage von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ innerhalb $\mathbb{R}$. Vorweg zeigen wir ein Resultat über $\mathbb{N}$, das nur auf den ersten Blick selbstverständlich erscheint.

Satz 2.10 *Sei $A \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge natürlicher Zahlen. Dann gelten:*

(i) A besitzt ein Minimum.

(ii) Ist A beschränkt, so hat A ein Maximum.

Beweis.

(i) Sei $U = \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ ist untere Schranke von } A\}$. Offensichtlich gilt $1 \in U$. Außerdem ist $U \subset \mathbb{N}$ (echte Teilmenge) (denn ist $k \in A$, so ist $k+1 \notin U$). Mit dem Induktionsprinzip gibt es ein $n_0 \in U$ mit $n_0 + 1 \notin U$ (sonst wäre $U = \mathbb{N}$).
Für dieses n_0 gilt: $n_0 = \min A$. Offensichtlich gilt $n_0 \leq n \ \forall n \in A$. Bleibt zu zeigen: $n_0 \in A$. Wäre $n_0 \notin A$, so wäre $n_0 < m \ \forall m \in A$, also $m - n_0 \geq 1$. Das heißt $m \geq n_0 + 1 \ \ \forall m \in A$, womit $n_0 + 1 \in U$ gilt, ein Widerspruch.

(ii) Sei $s = \sup A$. Mit (A3) existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $s < n_0$. Damit gilt für alle $k \in A : \ k \leq s < n_0$, also $n_0 - k \in \mathbb{N}$. Sei $m = \min(n_0 - A)$ gemäß (i). Dann ist $n_0 - m = \max A$.

$\diamond$

Satz 2.11 *Es gelten:*

(i) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x < k+1$.

(ii) Zu je zwei reellen Zahlen a, b mit $a < b$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.

(Die ganze Zahl k von (i) wird mit $[x]$ bezeichnet. [ ] heißt **Gaußklammer**. *$[x]$ ist also die größte ganze Zahl kleiner gleich x.)*

Beweis.

(i) Mit (A3) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1 - x < n$, also $1 < n + x$. Mit Satz 2.10(i) existiert eine größte Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n + x$. Dann ist $k = m - n$ die größte ganze Zahl mit $k \leq x$. Die Eindeutigkeit ist klar.

(ii) Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$ (vergleiche Satz 2.4(a)).
Gemäß (i) setze $k = [na]$, d.h. $k \leq na < k+1$.
Für $r = \frac{k+1}{n} \in \mathbb{Q}$ gilt erstens $r > \frac{k}{n} \geq \frac{na}{n} = a$ und zweitens $b > \frac{1}{n} + a = \frac{1+an}{n} \geq \frac{1+k}{n} = r$.

$\diamond$

3 Komplexe Zahlen

In diesem Abschnitt werden wir nur sehr kurz auf die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ eingehen. Die komplexen Zahlen wurden bereits in der Linearen Algebra behandelt. Als Menge ist $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Man schreibt die Elemente aus $\mathbb{C}$ als

$$z = (x, y) \;= x + iy \qquad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dabei entspricht $i = 0 + i1 = (0, 1)$. Ferner schreibt man Re $z = x$ (Realteil von z) und Im $z = y$ (Imaginärteil von z).

$\mathbb{C}$ ist mit

$$\begin{aligned} (x+iy)+(u+iv) &= (x+u)+i(y+v) \qquad \text{als Addition} \\ \text{und} \quad (x+iy)(u+iv) &= (xu-yv)+i(xv+yu) \qquad \text{als Multiplikation} \end{aligned}$$

ein kommutativer Körper. Die **imaginäre Einheit** i ist besonders ausgezeichnet. Es gilt $i \cdot i = -1$. Insbesondere gibt es keine Anordnung auf $\mathbb{C}$, die (A1), (A2) erfüllt (es müßte $i^2 > 0$ gelten!)
Achtung: Für $z \in \mathbb{C}$ ist $z > 0$ "absolut sinnlos".

Man kann aber einen Absolutbetrag von $z \in \mathbb{C}$ einführen, der genau der Länge des Vektors $z = \binom{x}{y}$ entspricht (vg. Lineare Algebra). Man setzt also

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (\textbf{Absolutbetrag} \text{ von } z)$$

(Die Wurzel ist für $x^2 + y^2 > 0$ mit Satz 2.6 erklärt. Sonst setze $\sqrt{0} = 0$).

Für $z = x + iy$ nennt man $\bar{z} := x - iy$ die **konjugiert komplexe** Zahl. Für den Absolutbetrag und die konjugiert komplexe Zahl gibt es Rechenregeln, die man direkt herleiten kann.

Satz 3.1 *Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gelten*

(1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

(2) $\bar{\bar{z}} = z$

(3) $Re\ z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad Im\ z = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(4) $|Re\ z| \le |z|, \quad |Im\ z| \le |z|$

(5) $|z| \le |Re\ z| + |Im\ z|$

(6) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

(7) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

(8) $|zw| = |z|\,|w|$

(9) Stets gilt $|z| \geq 0$, *und* $z = 0$ *ist äquivalent zu* $z = 0$.

Gesondert wollen wir die Dreiecksungleichung aufführen:

Satz 3.2 *Seien* $z, w \in \mathbb{C}$. *Es gelten*

(1) $|z + w| \leq |z| + |w|$

(2) $|\,|z| - |w|\,| \leq |z - w|$

Beweis.

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|\mathrm{Re}(z\bar{w})| + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

(2) zeigt man nun wie im Reellen. ◇

Für die Vorstellung sei erwähnt, daß für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$

$$U_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \qquad \text{bzw.}$$

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$$

eine offene (bzw. abgeschlossene) Kreisscheibe um a mit Radius r bestimmt.

Im übrigen nennen wir eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt, falls es ein $M \geq 0$ gibt, so daß $|z| \leq M$ für alle $z \in A$. Beachte aber, daß man Begriffe wie Supremum und Maximum für Teilmengen von $\mathbb{C}$ nicht einführen kann.

Wir erwähnen noch ein Resultat, das wir erst später beweisen werden, das aber sehr wichtig ist.

Satz 3.3 (Fundamentalsatz der Algebra (Laplace, Gauß))
Seien $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$. *Die Gleichung*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$$

hat in $\mathbb{C}$ *mindestens eine Lösung.*

Bemerkung: Im Reellen stimmt diese Ausage nicht (vgl. $x^2 + 1 = 0$).
Pierre Simon Laplace (1749-1827, Paris)
Carl Friedrich Gauß (1777-1855, Göttingen)

Wir fassen künftig $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf ($\mathbb{R} + i0 \subseteq \mathbb{C}$).

4 Folgen und Reihen von Zahlen und Konvergenz

Wir haben in §2 gesehen, daß man mit Folgen von Intervallen reelle Zahlen definiert. Wir konzentrieren uns nun auf Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ oder $a_n \in \mathbb{R}$, also Folgen komplexer Zahlen oder reller Zahlen. Wir haben schon beobachten können, daß etwa $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ der Euler-Zahl e mit wachsendem n immer näher kommt. Auf Fourier (Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768-1830, Paris) geht etwa die Annäherung von $\frac{\pi}{4}$ durch Folgen s_n, die sich als Summen schreiben, zurück:

$$s_n \;=\; 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\pm(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$$

Was passiert z.B., wenn man Summen

$$s_n \;=\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

betrachtet, nähern sie sich einer Zahl; wenn ja, welcher?
Darüber hinaus stellen sich Fragen nach möglichst schneller Annäherung an bestimmte Zahlen, z.B. e oder π.

Obige Annäherung an $\frac{\pi}{4}$ ist sehr langsam. Beispielsweise wird heutzutage

$$s_n \;=\; \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{k=0}^{n}\frac{(4k)!}{(k!)^4}\,\frac{1103+26390k}{396^{4k}} \longrightarrow \frac{1}{\pi}$$

zur Berechnung von etwa 2 Milliarden Stellen von π benutzt. Letzteres stammt von Srinivasa Ramanujan (1887-1920, Madras, Cambridge).

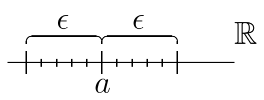
Manche Folgen sind von der Form $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oder gar $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Als erstes merken wir an, daß eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ etwas anderes ist als die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Bei der Folge kommt es auf die Reihenfolge an. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sind verschiedene Folgen. Die Menge der Folgenglieder ist jeweils $\{-1, 1\}$.

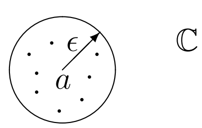
Definition 4.1 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge (reeller oder komplexer) Zahlen. Man sagt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a $(\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C})$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|a_n - a| \;<\; \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Man nennt a **Grenzwert** *(oder Limes) von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreibt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, oder $a_n \to a$ mit $n \to \infty$.*



alle a_n mit $n \geq N$
liegen in $]a-\epsilon, a+\epsilon[$



alle a_n mit $n \geq N$
liegen in $U_\epsilon(a)$

Bemerkung: Grenzwerte sind eindeutig bestimmt.
(Denn ist $\tilde{a} \neq a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, so setze $\epsilon := |a-\tilde{a}|/2$. Gilt $|a_n - a| < \epsilon \;\; \forall n \geq N$, so folgt: $|\tilde{a} - a_n| \;\geq |\tilde{a} - a| - |a - a_n| \;> 2\epsilon - \epsilon \;= \epsilon \;\; \forall n \geq N$.)

Beispiele:

(1) $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
(denn: $|a_n - a| = 0$)

(2) $a_n = \dfrac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hier gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
(denn: zu $\epsilon > 0$ existiert $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{\epsilon} < N$ (vgl. (A3)). Folglich gilt $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} \;\leq \dfrac{1}{N} < \epsilon$ für alle $n \geq N$.)

(3) $a_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
(denn: $\left|1 - \dfrac{n+1}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$)

(4) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

(5) $a_n = q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:
Ist $|q| < 1,\; q \in \mathbb{C}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
(mit Satz 2.4(b) und $|q^n - 0| = |q|^n$)

(6) $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$. Ist $|q| < 1$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n \;= \frac{1}{1-q}$$

(denn: Mit Übungsaufgabe H3 gilt $s_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Folglich ist $\left|s_n - \dfrac{1}{1-q}\right| \;= \left|\dfrac{q^{n+1}}{1-q}\right| \;= \dfrac{1}{1-q}|q|^{n+1} \;\to 0$ mit (5))

Letzteres Beispiel ist eine **Reihe**, d.h. eine Folge, die durch fortgesetzte Summation entsteht. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ die Folge der **Partialsummen**, so schreibt man $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, falls $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt Reihe. Beispielsweise nennt man $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ die geometrische Reihe.
Man kann (und das wird tatsächlich gemacht) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ auch als einfache Abkürzung für die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verwenden.

Besonders wichtig sind Folgen, die durch rekursive Vorschriften bestimmt sind:

(7) Sei $x > 0$. Definiere rekursiv

$$a_0 := x, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$ Wir werden sehen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$.

Wir wollen einige einfache Fakten herleiten.

Satz 4.2 *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, so ist die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.*

Beweis. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zu $\epsilon = 1$ existiert ein $N = N(1) \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$. Damit gilt

$$|a_n| \;\leq\; |a_n - a| + |a| \;<\; 1 + |a| \quad \forall n \geq N.$$

Mit $M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$ hat man $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\diamond$

Wir haben mit Satz 4.2 eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge, nämlich die Beschränktheit von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zum Beispiel kann $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergieren, falls $|q| > 1, q \in \mathbb{C}$, da $\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt (mit Satz 2.4(a)).

Ein hinreichendes Kriterium enthält folgendes Resultat. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), falls $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 4.3 *Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte (bzw. monoton fallende und nach unten beschränkte) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen das Supremum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, (bzw. konvergiert gegen das Infimum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$). (Man schreibt auch $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, analog inf.)*

Beweis. Wir führen den Nachweis nur für den monoton wachsenden und nach oben beschränkten Fall. Bezeichne $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ gemäß Satz 2.8. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > s - \epsilon$, (sonst wäre s nicht kleinste obere Schranke). Mit $a_N \leq a_n \leq s$ folgt $|a_n - s| \leq s - a_N < \epsilon$ für alle $n \geq N$. $\diamond$

Einfache Rechenregeln erleichtern die Bestimmung von Grenzwerten.

Satz 4.4 *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, sowie $\alpha \in \mathbb{C}$. Es gelten:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$

(5) *Ist $b \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$, und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$.*

(6) *Sind $a_n > 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$ $\quad (k \in \mathbb{N})$.*

Beweis.

(1) Sei $\epsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon \;\; \forall n \geq N$. Dann gilt $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \epsilon \;\; \forall n \geq N$.

(2) ist einfach.

(3) Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon/2$ und $|b_n - b| < \epsilon/2$ für alle $n \geq N$. Damit gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

(4) Mit Satz 4.3 existiert ein $M \geq 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $K = \max(|b|, M)$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2K}$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K}$ für alle $n \geq N$. Damit gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \\ &< K\,\frac{\epsilon}{2K} + K\,\frac{\epsilon}{2K} = \epsilon. \end{aligned}$$

(5) Mit (4) reicht es, den Fall $a_n = 1$ zu betrachten. Zu $\epsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Folglich gilt $\frac{|b|}{2} \leq |b_n|$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$.
Bleibt noch zu zeigen, daß $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n \geq n_0}} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ gilt.

Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_0$ mit $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}\,|b|^2$ für alle $n \geq N$. Damit gilt für $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| &= \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n|\,|b|}\,|b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2}\,|b_n - b| \\ &< \frac{2}{|b|^2}\,\frac{\epsilon |b|^2}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

(6) Übungen.

$\diamond$

Satz 4.5 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine gegen* a *konvergente Folge,* $c \in \mathbb{R}$.

(1) Gilt $a_n \in \mathbb{R}$ *und* $a_n \le c$ *(bzw.* $a_n \ge c$*) für alle* $n \in \mathbb{N}$*, so gilt* $a \le c$ *(bzw.* $a \ge c$*).*

(2) Gilt $|a_n| \le c$ *(bzw.* $|a_n| \ge c$*) für alle* $n \in \mathbb{N}$*, so gilt* $|a| \le c$ *(bzw.* $|a| \ge c$*).*

Beweis.

(1) Wäre $a > c$, so findet man zu $\epsilon = a - c$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$. Also $a_n = a_n - a + a \ \ge a - |a_n - a| \ > a - \epsilon = c$, ein Widerspruch.

(Ist $a_n \ge c$, so gilt $-a_n \le -c$. Damit haben wir $-a \le -c$, also $a \ge c$)

(2) Mit $a_n \to a$ gilt auch $|a_n| \to |a|$ (siehe Satz 4.4(1)). Mit dem schon Bewiesenen gilt $|a| \le c$, falls $|a_n| \le c$.

◇

Korollar 4.6 *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *reelle Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Gilt* $a_n \le b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, so gilt* $a \le b$.

Beweis. Für $c_n = b_n - a_n$ gilt $c_n \ge 0$, also $0 \le c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b - a$. ◇

Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b_n \ne 0$, heißen **asymptotisch gleich**, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.
Man schreibt: $a_n \cong b_n$ für $n \to \infty$.

Beispiele:

(1) Mit den Rechenregeln folgt (für $\alpha_0, ..., \alpha_p; \beta_0, ..., \beta_q \in \mathbb{C}$, $\alpha_p \ne 0$, $\beta_q \ne 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + ... + \alpha_0}{\beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + ... + \beta_0} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_p}{\beta_q} & \text{falls } p = q \\ 0 & \text{falls } p < q \\ \text{konvergiert nicht} & \text{falls } p > q \end{cases}$$

Folglich gilt:

$$\alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + ... + \alpha_0 \ \cong \ \alpha_p n^p$$

(2) Wallissches Produkt (John Wallis, 1616-1703, Oxford)

$$p_n := \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot ... \cdot \frac{2n}{2n-1} \ = \ \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}.$$

Wir zeigen:

$$p_n \cong \alpha\sqrt{n}, \qquad \text{wobei } \alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } \sqrt{2} \le \alpha \le 2$$

(tatsächlich gilt: $\alpha = \sqrt{\pi}$, Beweis hierzu später)

Beweis. $\dfrac{p_n}{\sqrt{n}}$ ist monoton fallend, denn

$$\left(\frac{\frac{p_{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{p_n}{\sqrt{n}}}\right)^2 = \frac{n}{n+1}\,\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} = \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1} < 1$$

und $\dfrac{p_n}{\sqrt{n+1}}$ ist monoton wachsend, denn

$$\left(\frac{\frac{p_{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{\frac{p_n}{\sqrt{n+1}}}\right)^2 = \frac{n+1}{n+2}\,\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} = \frac{4(n+1)^3}{4n^3+12n^2+9n+2} > 1$$

Damit gilt

$$\sqrt{2} = \frac{p_1}{\sqrt{2}} \le \dots \le \frac{p_n}{\sqrt{n+1}} \le \frac{p_n}{\sqrt{n}} \le \dots p_1 = 2$$

Also folgt mit Satz 4.3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\sqrt{n}} \overset{(*)}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{p_n}{\sqrt{n}} =: \alpha \ge \sqrt{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\sqrt{n+1}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{p_n}{\sqrt{n+1}} =: \beta \le 2.$$

Insbesondere ist (mit $(*)$) gezeigt: $p_n \cong \alpha\sqrt{n}$. ◇

Weiter gilt auch $\alpha = \beta$, denn

$$\frac{\frac{p_n}{\sqrt{n}}}{\frac{p_n}{\sqrt{n+1}}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \to 1$$

Insbesondere erhält man: $I_n = \left[\dfrac{p_n}{\sqrt{n+1}}, \dfrac{p_n}{\sqrt{n}}\right]$ bilden eine Intervallschachtelung mit $\alpha \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Weitere wichtige Grenzwerte sind:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes $a > 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$

(1) und (2) werden in den Übungen hergeleitet.

zu (3): Sei $x := |z| - 1 > 0$. Sei $n > 2k+2$, d.h. $\dfrac{n+1}{2} \ge k+1 > k$

Es gilt mit der Binomialformel (Korollar 1.4)

$$|z|^n = (1+x)^n > \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\, x^{k+1} > \left(\frac{n}{2}\right)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

(denn $n-k \geq (n+1) - \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n+1}{2} > \dfrac{n}{2}$).

Damit folgt:

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < n^k \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}} \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} = \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{mit } n \to \infty$$

(wegen Satz 4.5)

Wir können nun bereits den Logarithmus — obwohl wir nur sehr beschränkte mathematische Mittel zur Verfügung haben — einführen. Dieses Konzept stammt von Hurwitz (Adolf Hurwitz, 1859-1919, Königsberg; Studium in München).
Zuerst betrachten wir für jedes $x > 0$ folgende rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$x_0 := x, \qquad x_{n+1} := \sqrt{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.1}$$

Offensichtlich ist $x_n = \sqrt[2^n]{x}$. Mit Z12 folgt auch: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Wir zeigen nochmals, daß unabhängig vom Startwert $x_0 = x$ immer gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \tag{4.2}$$

Beweis. von (4.2): Ist $x_0 = x \geq 1$, so ist auch $x_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, und daher $x_{n+1} \leq x_{n+1}^2 = x_n$, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Also existiert $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 1$ (Satz 4.3).
Da aber auch $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ ist, gilt

$$\xi^2 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

Damit bleiben zwei Möglichkeiten für ξ : $\xi = 0$ oder $\xi = 1$ (denn: $0 = \xi^2 - \xi = \xi(\xi-1)$)
$\xi = 0$ ist nicht möglich, da $x_n \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ist $0 < x < 1$, so betrachte $\dfrac{1}{x}$ als Startwert. Mit $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ folgt dann mit obiger Berechnung ebenfalls (4.2). ◇

Proposition 4.7 *Sei $x > 0$. Mit der in (4.1) erklärten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ setze*

$$a_n := 2^n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right), \qquad b_n = 2^n\,(x_n - 1). \tag{4.3}$$

Dann ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wir zeigen: $b_{n+1} \leq b_n$ und $a_n \leq a_{n+1}$, sowie $a_n \leq b_n$.

Dazu benutzen wir zwei Ungleichungen für beliebiges $y > 0$:

(i) $2(y-1) \leq y^2 - 1$ (da $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \geq 0$)

(ii) $y + \frac{1}{y} \geq 2$ (da $y^2 + 1 \geq 2y$)

Nun gilt:

$$b_{n+1} = 2^{n+1}(x_{n+1} - 1) = 2^n \cdot 2(x_{n+1} - 1) \overset{(i)}{\leq} 2^n(x_{n+1}^2 - 1) = 2^n(x_n - 1) = b_n$$

und

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2^{n+1}\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = -2^n \cdot 2\left(\frac{1}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{(i)}{\geq} -2^n\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - 1\right) \\ &= 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = a_n \end{aligned}$$

und schließlich mit (ii)

$$a_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \overset{(ii)}{\leq} 2^n(x_n - 1) = b_n$$

Damit sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen (mit Satz 4.3), denn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton steigend, beschränkt nach oben durch b_0 und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, beschränkt nach unten durch a_0.

Da $a_n x_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)x_n = 2^n(x_n - 1) = b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Damit ist gezeigt: $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Intervallschachtelung. ◇

Ausgehend von $x > 0$ haben wir über (4.1) und (4.3) eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert. Bezeichne für $I_n = [a_n, b_n]$

$$\ln(x) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{4.4}$$

d.h. $\{\ln(x)\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_0} I_n$.

Wir nennen diese Zahl den **(natürlichen) Logarithmus** von x.

Satz 4.8 *Es gelten für alle $x, y > 0$*

(a) $\ln(1) = 0$

(b) $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

und $2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq \ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$

(c) $\ln(xy) \;=\ln(x)+\ln(y)$ *(Funktionalgleichung des Logarithmus)*

Beweis.

(a) Für $x=1$ gilt $x_n=1$, also $a_n=b_n=0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, und somit $\ln(1)=0$

(b) Es gilt ja $a_n\le\ln(x)\;\le b_n\;\forall n\in\mathbb{N}_0$ (a_n, b_n hängen von $x>0$ ab).
Für $n=0$ erhält man

$$1-\frac{1}{x}\;\le\;\ln(x)\le\;x-1$$

Für $n=1$ gilt $x_1=\sqrt{x}$, also hat man $2\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\;\le\ln(x)\;\le 2(\sqrt{x}-1)$.

(c) Bezeichne $z:=xy>0$ und bezeichne jeweils gemäß (4.1) $x_0=x,\;y_0=y,\;z_0=z$ und $x_{n+1}=\sqrt{x_n},\;y_{n+1}=\sqrt{y_n},\;z_{n+1}=\sqrt{z_n}$.
Mit vollständiger Induktion folgt sofort $z_n=x_ny_n$. Unter Benutzung der b_n zu x bzw. y bzw. z erhält man:

$$\ln(z)\;=\;\lim_{n\to\infty}2^n(z_n-1)\;=\;\lim_{n\to\infty}2^n(x_ny_n-1)$$

$$=\;\lim_{n\to\infty}\left(2^nx_n(y_n-1)\;+2^n(x_n-1)\right)\;=\;\lim_{n\to\infty}x_n\;\lim_{n\to\infty}2^n(y_n-1)\;+\;\lim_{n\to\infty}2^n(x_n-1)$$

$$\underset{(2)}{=}\;\ln(y)\;+\ln(x)$$

$\diamond$

Korollar 4.9 *Es gelten:*

(a) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)\;=-\ln(x)$ *für alle* $x>0$

(b) Aus $0<x<y$ *folgt* $\ln(x)\;<\ln(y)$

Beweis.

(a) Mit der Funktionalgleichung gilt:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)\;+\ln(x)\;=\;\ln\left(\frac{1}{x}\,x\right)\;=\ln(1)\;=0.$$

(b) Setze $c=\frac{y}{x}$. Mit $c>1$ folgt aus Satz 4.8(b):
$\ln(c)\;\ge 1-\frac{1}{c}\;>0$. Deshalb ist mit der Funktionalgleichung

$$\ln(y)\;=\;\ln(cx)\;=\;\ln(c)\;+\ln(x)\;>\ln(x)$$

◇

Der ungefähre Verlauf von der Funktion $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ sieht folgendermaßen aus:

$y = \ln(x)$

Der Logarithmus wird zwar beliebig groß, aber äußerst langsam. Um 30cm auf der y-Achse an Höhe zu gewinnen (DIN A4-Blatt), braucht man auf der x-Achse 100 Millionen Kilometer ($\approx \frac{2}{3} \times$ Abstand Erde — Sonne).

Die Umkehrfunktion von ln, die Exponentialfunktion, führen wir später als Reihe ein, und zwar gleich für alle komplexen Zahlen.

5 Metrische Räume und Cauchyfolgen

Wir haben gesehen, daß Konvergenz sowohl für reelle Folgen als auch für komplexe Folgen, erklärt ist. Wir haben dabei nur den Begriff des Abstandes zwischen x und y benützt, nämlich $|x-y|$.

Definition 5.1 *Sei M eine Menge, $d : M \times M \to [0,\infty[$ eine Abbildung mit*

(M1) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

(M2) $d(a,b) = d(b,a)$

(M3) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$ *(Dreiecksungleichung)*

für alle $a,b,c \in M$. Dann heißt d eine **Metrik** *auf X, (X,d) heißt* **metrischer Raum**, *und $d(a,b)$* **Abstand** *von a und b.*

Beispiele:

(1) Auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ haben wir die "natürliche" Metrik,

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \text{für } x,y \in \mathbb{R} \text{ oder } x,y \in \mathbb{C}.$$

(Wir schreiben künftig $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

(2) Auf jeder Menge M $(\neq \emptyset)$ ist durch

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{für } a = b \\ 1 & \text{für } a \neq b \end{cases}$$

$a,b \in M$ eine Metrik gegeben (diskrete Metrik).

(3) Sei $M = \{x = (x_1,...,x_n) : x_1,...,x_n \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^n$
Durch

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$$

(= Anzahl der Stellen, an denen x und y verschiedene Einträge haben)
ist eine Metrik definiert. $d(x,y)$ heißt **Hamming-Abstand**.

(4) Auf $\mathbb{K}$ haben wir bereits zwei Metriken, die natürliche und die diskrete Metrik. Eine weitere ist durch

$$d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \qquad x,y \in \mathbb{K}$$

definiert. (M1), (M2) sind offensichtlich erfüllt. Um (M3) zu zeigen, verwenden wir folgende Hilfsaussage:

$$\text{Sind } s,t \geq 0,\ s \leq t, \quad \text{so gilt} \quad \frac{s}{1+s} \leq \frac{t}{1+t} \qquad (*)$$

(denn $s \leq t \Rightarrow s(1+t) = s + st \leq t + st = t(1+s)$

$$\Longrightarrow \frac{s}{1+s} \leq \frac{t}{1+t} \,)$$

Mit $(*)$ gilt

$$d(x,z) = \frac{|x-z|}{1+|x-z|} \overset{(*)}{\leq} \frac{(|x-y| + |y-z|)}{1+(|x-y| + |y-z|)}$$

$$= \frac{|x-y|}{1+(|x-y| + |y-z|)} + \frac{|y-z|}{1+(|x-y| + |y-z|)} \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Man beachte, daß in einem metrischen Raum (M,d) jede Teilmenge $L \subseteq M$ mit $d|L$, der Einschränkung von d auf L, ein metrischer Raum ist.

Ist die zugrundeliegende Menge sogar ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) , so erhält man Metriken über sog. Normen.

Definition 5.2 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \to [0,\infty[$ heißt* **Norm***, falls*

(N1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\| \lambda x \| = |\lambda| \; \| x \|$

(N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(Dreiecksungleichung)*

für alle $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$. $(X, \|\cdot\|)$ heißt **normierter Raum***.*

Man sieht sofort, daß bei gegebener Norm $\|\cdot\|$ durch

$$d(x,y) := \| x - y \| \tag{5.1}$$

eine Metrik auf X definiert wird.

Die Metriken auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, die durch Normen gemäß (5.1) bestimmt sind, kann man einfach charakterisieren.

Satz 5.3 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Metrik auf X wird von einer Norm definiert genau dann, wenn*

(a) $d(x+a, y+a) = d(x,y)$

(b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y)$

für alle $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

Beweis. Sei zuerst vorausgesetzt, daß $d(x,y) :=\| x-y \|$ gesetzt wird bei gegebener Norm $\| \cdot \|$. Dann gelten

$$d(x+a, y+a) = \| (x+a) - (y+a) \| = d(x,y) \qquad \text{und}$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = \| (\lambda x) - (\lambda y) \| = |\lambda| \, d(x,y).$$

Sei umgekehrt d mit (a) und (b) gegeben. Wir setzen nun $\| x \| := d(x,0)$. Dann ist $\| \cdot \|$ eine Norm. Es gilt nämlich
$\| x \| = 0 \Leftrightarrow d(x,0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Ferner $\| \lambda x \| = d(\lambda x, \lambda 0) \overset{(b)}{=} |\lambda| \, d(x,0) = |\lambda| \ \| x \|$. Schließlich gilt auch

$$\| x+y \| = d(x+y,0) \overset{(a)}{=} d(x,-y) \leq d(x,0) + d(0,-y)$$

$$= d(x,0) + d(-y,0) \overset{(b)}{=} \| x \| + \| y \| .$$

Bleibt zu prüfen, daß zwischen der so definierten Norm und d die Beziehung (5.1) gilt:

$$\| x-y \| = d(x-y,0) \overset{(1)}{=} d(x,y).$$

$\diamond$

Beispiele:

(1) Sei $X = \mathbb{K}^d$. Auf $\mathbb{K}^d$ können wir (mit unseren Mitteln) drei Normen angeben: Für $x = (x_1, ..., x_d)$ sei

$$\| x \|_1 = \sum_{k=1}^{d} |x_k|$$

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$\| x \|_\infty = \max_{k=1,\dots,d} |x_k|.$$

(2) Sei X der $\mathbb{K}$-Vektorraum $X = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ beschränkt } \}$ mit komponentenweisen Operationen. Durch $\| x \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ ist eine Norm auf X definiert.

Die Eigenschaften (N1), (N2) gelten offensichtlich für die drei Normen. Die Dreiecksungleichung ist für $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_\infty$ einfach zu sehen. Für $\| \cdot \|_2$ braucht man die Cauchy-Ungleichung (auch Cauchy-Schwarz-Ungleichung oder Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung genannt; Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857, Paris, Viktor Jakowlewitsch Bunjakowski, 1804-1889, Petersburg, Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921, Berlin).

Proposition 5.4 (Cauchy-Ungleichung) *Seien* $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^n$ *und* $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{K}^n$. *Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{d} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^2 \right)^{1/2} . \tag{5.2}$$

Der Nachweis wurde in der Zentralübung Z7 geführt. Man hat nur $a_k = |x_k|,\ b_k = |y_k|$ zu setzen.

Proposition 5.5 (Minkowski-Ungleichung)
(Hermann Minkowski, 1864-1909, Königsberg, Göttingen)

Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt

$$\| x + y \|_2 = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$
$$= \| x \|_2 + \| y \|_2 \,.$$

Beweis.

$$\| x + y \|_2^2 = \sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k| \; |x_k| + \sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k| \; |y_k|$$
$$\overset{(5.4)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$
$$= \| x + y \|_2 \; (\| x \|_2 + \| y \|_2).$$

$\diamond$

Bemerkung: $(\mathbb{R}^d, \| \cdot \|_2)$ nennt man Euklidischen Raum.

Ist (M, d) ein metrischer Raum, so bezeichnen wir mit

$$U_r(a) := \{ b \in M : \ d(b, a) < r \} \qquad \text{und} \quad K_r(a) := \{ b \in M : d(b, a) \leq r \}$$
$$\text{und} \qquad S_r(a) := \{ b \in M : \ d(b, a) = r \} \qquad \text{für festes } a \in M, \ r > 0.$$

Für Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}},\ a_n \in M$ liegt es nun auf der Hand, folgenden Konvergenzbegriff einzuführen.

Definition 5.6 *Sei (M, d) ein metrischer Raum, und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M.*

(i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent** *gegen $a \in M$, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(a_n, a) < \epsilon$ für alle $n \geq N$. (Man schreibt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{d} a$)*

(ii) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchyfolge***, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(a_n, a_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.*

(iii) (M, d) heißt **vollständig***, falls jede Cauchyfolge in M konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt* **Banachraum***.*

Bemerkungen:

(1) Wir werden in Kürze sehen, daß für $M = \mathbb{R}$ mit der natürlichen Metrik die Vollständigkeit von §2 mit obiger gleich ist. Wir weisen aber darauf hin, daß $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ mit $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist, so daß $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist. (Übungsaufgabe)

(2) Man beachte auch, daß eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (M,d) höchstens gegen einen Limes a konvergieren kann. (Man kann den Beweis von §4 fast wörtlich kopieren).

(3) Außerdem sieht man problemlos, daß jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (M,d) eine Cauchyfolge ist. Ist $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a) < \dfrac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt

$$d(a_n, a_m) \ \leq d(a_n, a) \ + d(a, a_m) \ < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{falls } n, m \geq N.$$

(4) Daß $\mathbb{Q}$ mit der natürlichen Metrik auch mit der Definition 5.6 nicht vollständig ist, erhält man unmittelbar: Innerhalb $]\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}[$ liegt mindestens ein $a_n \in \mathbb{Q}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, konvergiert aber nicht (innerhalb $\mathbb{Q}$).

(5) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^d$, $x_n = (x_{n,1}, ..., x_{n,d})$. Da gilt

$$\sum_{k=1}^{d} |x_{n,k} - x_k|^2 \ \to 0 \iff x_{n,k} \to x_k \quad \text{für alle } k = 1, ..., d,$$

konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{K}^d$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ genau dann, wenn alle Komponenten $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_k $\forall k = 1, ..., d$ konvergieren.

Genauso sieht man:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$ genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$, $k = 1, ..., d$ Cauchyfolgen in $\mathbb{K}$ sind.

Wenn wir im folgenden von Konvergenz in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (ohne zusätzliche Angabe) sprechen, so in der "natürlichen" Metrik.

Satz 5.7 *Jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Beweis. Zu $k \in \mathbb{N}$ existiert $n_k \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| \ < \dfrac{1}{2^{k+1}}$ für alle $n, m \geq n_k$. Wir können annehmen, daß $n_{k+1} \geq n_k$.
Definiere Intervalle um a_{n_k} durch

$$I_k := \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a_{n_k}| \ \leq \frac{1}{2^k}\}.$$

Es gelten: $a_n \in I_k$ für alle $n \geq n_k$ (mit der Definition der I_k) und $I_{k+1} \subseteq I_k$. Ist nämlich $x \in I_{k+1}$, dann also $|x - a_{n_{k+1}}| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$.
Da mit $n_{k+1} \geq n_k$ auch gilt $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^{k+1}}$, folgt

$$|x - a_{n_k}| \leq |x - a_{n_{k+1}}| + |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < \frac{1}{2^k}, \qquad \text{d.h. } x \in I_k.$$

Die Intervalllänge der I_k ist $2\frac{1}{2^k}$. Somit ist $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Sei $\{a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ gemäß §2. Wir zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Ist $\epsilon > 0$, so wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{2}$. Für $n \geq N := n_k$ gilt dann

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

◇

Mit den Bemerkungen vor Satz 5.6 folgt:

Korollar 5.8 *Der Euklidische Raum* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *ist vollständig. Insbesondere ist auch* $\mathbb{C}$ *(mit der natürlichen Metrik) vollständig.*

Eine notwendige Eigenschaft konvergenter Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum ist deren Beschränktheit.

Dabei heißt eine Teilmenge A in einem metrischen Raum (M, d) **beschränkt**, falls ein $K \geq 0$ und ein Punkt $b \in M$ existiert mit $d(a, b) \leq K$ für alle $a \in A$.

Proposition 5.9 *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge in einem metrischen Raum* (M, d)*, so ist* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *beschränkt.*

Den Nachweis von Proposition 5.9 führt man wie den von Satz 4.2. Man beachte, daß jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Eine analoge Aussage zu Satz 4.3 existiert deshalb nicht, da Monotonie in metrischen Räumen nicht sinnvoll erklärt werden kann. Folgende Überlegungen umgehen mehr oder weniger dieses Problem, und gelten natürlich auch für $\mathbb{R}$.

Streicht man aus einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einige Glieder, so erhält man eine neue Folge. Formal läßt sich dies folgendermaßen beschreiben:

Ist $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ eine Folge natürlicher Zahlen, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist z.B. $a_n = (-1)^n$, so ist sowohl $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k = 1$ als auch $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $c_k = -1$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Selbstverständlich hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch weitere Teilfolgen.

Proposition 5.10 *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in einem metrischen Raum* (M, d)*, die gegen* $a \in M$ *konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* a.

Beweis. Ist $n_1 < n_2 < ...$, so gilt $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(a_k, a) < \epsilon$ für alle $k \geq N$. Folglich gilt auch $d(a_{n_k}, a) < \epsilon$ für alle $k \geq N$, d.h. $a_{n_k} \xrightarrow{d} a$ mit $k \to \infty$. ◇

Lemma 5.11 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (M,d) und $a \in M$. Folgende drei Ausagen sind äquivalent:*

(1) Zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq N$ mit $d(a_n, a) < \epsilon$.

(2) Für jedes $\epsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \ d(a_n, a) < \epsilon\}$ unendlich.

(3) Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Beweis. Wir zeigen: (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

Gelte (1). Dann existiert zu $\epsilon = 1, N = 1$ ein $n_1 \geq N = 1$ mit $d(a_{n_1}, a) < 1$. Betrachte nun $\epsilon = \frac{1}{2}$, $N = n_1 + 1$. Dazu existiert $n_2 \geq N > n_1$ mit $d(a_{n_2}, a) < \frac{1}{2}$. Rekursiv erhält man $n_1 < n_2 < ... < n_k <$ mit $d(a_{n_k}, a) < \frac{1}{k}$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ (in M).

Gelte (3). Zu $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(a_{n_k}, a) < \epsilon$ für alle $k \geq N$, d.h. $\{n_k \in \mathbb{N} : k \geq N\} \subseteq \{m \in \mathbb{N} : d(a_m, a) < \epsilon\}$ womit letztere Menge unendlich ist.

Gelte schließlich (2). Seien $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann muß es einen Index n geben mit $n \geq N$ und $d(a_n, a) < \epsilon$, sonst wäre $\{n \in \mathbb{N} : d(a_n, a) < \epsilon\}$ endlich. ◇

Definition 5.12 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (M,d). Ein Element $a \in M$ heißt* **Häufungswert** *von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : d(a_n, a) < \epsilon\}$ unendlich ist.*

Lemma 5.11 gibt drei gleichwertige Charakterisierungen von a ist Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $\mathbb{R}$ (mit der natürlichen Metrik) können wir zeigen:

Satz 5.13 (Bolzano-Weierstraß) *(Bernd Bolzano, 1781-1848, Prag)*
Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt einen Häufungswert.

Beweis. Da $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, existieren $A_1, B_1 \in \mathbb{R}$ mit $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [A_1, B_1]$. Setze $I_1 = [A_1, B_1]$. Wir konstruieren rekursiv $I_k = [A_k, B_k]$ mit

(i) $[A_k, B_k]$ enthält unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(ii) $[A_{k+1}, B_{k+1}] \subseteq [A_k, B_k]$

(iii) $B_k - A_k = \frac{1}{2^{k-1}} (B_1 - A_1)$.

Ist $[A_k, B_k]$ gegeben, so setze $M = \frac{1}{2}(A_k + B_k)$. Da in $[A_k, B_k]$ unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen, sind mindestens in einem der beiden Intervalle $[A_k, M]$ und $[M, B_k]$ unendlich viele a_n. Wir setzen

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] \;=\; \begin{cases} [A_k, M] & \text{falls in } [A_k, M] \text{ unendlich viele } a_n \text{ liegen} \\ [M, B_k] & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Sei $\{a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. a ist Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Denn zu $\epsilon > 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $[A_k, B_k] \subseteq U_\epsilon(a) =]a-\epsilon, a+\epsilon[$, also enthält $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ unendlich viele a_n. $\diamond$

Korollar 5.14 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge im $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$, die beschränkt ist. Dann besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ einen Häufungswert $a \in \mathbb{R}^d$. (Insbesondere hat jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ einen Häufungswert.)*

Beweis. Es ist $a_n = (a_{n,1}, ..., a_{n,d}) \in \mathbb{R}^d$. Wir betrachten die beschränkte Folge $(a_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. Mit Satz 5.13 und Lemma 5.11 existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k,1})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Betrachte nun $(a_{n_k,2})_{k\in\mathbb{N}}$. Wir schreiben $b_{k,2} := a_{n_k,2}$. Wieder existiert eine konvergente Teilfolge $(b_{k_l,2})_{l\in\mathbb{N}}$. Nun betrachte $(b_{k_l,3})_{l\in\mathbb{N}}$. Geht man weiter so vor bis zur d-ten Komponente, so erhält man eine Teilfolge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ konvergiert, da jede der Komponentenfolgen $(a_{n_m,j})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1, ..., d$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. $\diamond$

Des öfteren sind bei der tatsächlichen Bestimmung von Konvergenz oder Nichtkonvergenz reeller Folgen die nächsten Begriffe hilfreich.

Definition 5.15 *Man sagt, daß eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ divergiert (oder uneigentlich gegen ∞ konvergiert), wenn es zu jedem $C > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $a_n > C$ für alle $n \geq N$, Divergiert $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞, so sagt man, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $-\infty$ divergiert.*

Beispiel: $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen ∞, falls $q > 1$.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte reelle Folge. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $b_n := \sup\{a_k : k \geq n\}$. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Folge. Wir unterscheiden 2 Fälle:

$\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nach unten beschränkt. Dann existiert mit Satz 4.3

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$

Ist $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht nach unten beschränkt, so divergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $-\infty$, und wir schreiben

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \;=\; -\infty$$

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \;=\; \infty$$

$\limsup_{n\to\infty} a_n$ heißt **Limes superior** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Analog führen wir den **Limes inferior** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, so betrachten wir $c_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$. Dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge. Ist $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt, so setzen wir

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} c_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$$

Ist $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht nach oben beschränkt, so schreiben wir

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Ist schließlich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Beispiele:

(a) $a_n = n$. Hier gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, (da $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht nach oben beschränkt ist.) Für den Limes inferior gilt $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = n$. Da $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt ist, folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$. (Achtung: $\liminf_{n\to\infty} a_n \neq \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$!)

(b) $a_n = (-1)^n n$. Hier gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder nach oben noch nach unten beschränkt ist).

(c) $a_n = \begin{cases} a & \text{für } n \text{ ungerade} \\ b & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$ mit $a < b$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = b \quad (\text{denn } b_n = b \ \ \forall n \in \mathbb{N}) \quad \text{und}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = a \quad (\text{denn } c_n = a \ \ \forall n \in \mathbb{N})$$

(d) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, ...)$)

Es gilt: $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Folglich gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Ferner haben wir

$$c_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = \begin{cases} -\left(1 + \frac{1}{n}\right) & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

also $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = -1$

Da offensichtlich immer gilt falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben und unten beschränkt ist:

$$c_n \;=\; \inf\{a_k : k \geq n\} \;\leq\; \sup\{a_k : k \geq n\} \;= b_n,$$

folgt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Dies ist auch richtig für unbeschränktes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn wir $-\infty < a < \infty$ für $a \in \mathbb{R}$ vereinbaren.

Satz 5.16 *Eine relle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn*

$$-\infty \;<\; \liminf_{n\to\infty} a_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} a_n \;<\infty$$

gilt. Wir haben dann Gleichheit der drei Grenzwerte.

Beweis. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Zu $\epsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt für $n \geq N$

$$a - \epsilon \leq \inf\{a_k : k \geq n\} \;\leq \sup\{a_k : k \geq n\} \;\leq a + \epsilon$$

und damit $a - \epsilon \;\leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \;\leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \;\leq a + \epsilon$.
Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n \;= \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Gelte nun $a := \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \;= \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Zu $\epsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a - \epsilon \;<\; \inf\{a_k : k \geq n\} \;\leq\; \sup\{a_k : k \geq n\} \;<\; a + \epsilon$$

für alle $n \geq N$. Erst recht gilt dann $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ für $n \geq N$. Das heißt aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\diamond$

Bemerkung: Man kann sich leicht überlegen, daß für die uneigentliche Konvergenz folgendes gilt: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann uneigentlich konvergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$), falls

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\text{bzw. } = -\infty).$$

Zum Schluß wollen wir noch die Beziehung zu Häufungswerten aufzeigen:

Satz 5.17 *(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte reelle Folge. Dann gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau dann mindestens einen Häufungswert, wenn $a^* := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ endlich ist. In diesem Fall ist a^* der größte Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach unten beschränkte reelle Folge. Dann gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau dann mindestens einen Häufungswert, wenn $a_* := \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ endlich ist. In diesem Fall ist a_* der kleinste Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. Wir zeigen nur (i):
Sei s ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt sicherlich $b_n := \sup\{a_k : k \geq n\} \geq s$, also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und wir haben $a^* = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \geq s$. Ist umgekehrt $a^* := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, so gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a^* < \epsilon/2$ für alle $n \geq N$, (beachte $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fallend gegen a^*). Dann existiert aber zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ mit $|a_n - a^*| < \epsilon$, d.h. a^* ist ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wegen Lemma 5.11,(1). ◇

Man beachte, daß unbeschränkte Folgen durchaus Häufungswerte haben können. Zum Beispiel hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2}\, n & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

einen Häufungswert 0, ist aber nach oben und unten unbeschränkt.

Korollar 5.18 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben und unten beschränkte reelle Folge. Dann ist $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ kleinster Häufungswert und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ größter Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis. Die beidseitige Beschränktheit liefert, daß $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ existieren. Nun wende Satz 5.17 an. ◇

Nützlich ist folgende Ungleichung:

Gilt $a_n \leq d_n$ für alle $n \geq N$, wobei N eine feste natürliche Zahl ist, so gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} d_n \tag{5.3}$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} d_n \tag{5.4}$$

Folgende charakteristische Eigenschaft des Limes superior und Limes inferior halten wir noch fest.

Proposition 5.19 *(1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Gilt $x > \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n < x$ für alle $n \geq N$.*

(2) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt. Gilt $x < \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > x$ für alle $n \geq N$.

Beweis. nur (1):
Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $a_n \geq x$. Damit gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \geq x \ \forall k \in \mathbb{N}$. Satz 5.13 liefert eine konvergente Teilfolge mit Limes größer oder gleich x. Widerspruch. ◇

6 Reihen

Wir haben bereits definiert, was die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ bedeutet, falls $a_n \in \mathbb{K}$. Natürlich können wir auch Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ untersuchen, falls $a_k \in (X, \|\cdot\|)$.

Sind die a_n Elemente eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$, und konvergieren die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \ \in X$$

gegen ein $s \in X$, so sagen wir, daß die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ in X gegen s konvergiert und schreiben $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Als erstes füllen wir unseren Vorrat an Beispielen auf.

(1) **Geometrische Reihe**: Sei $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$. Es gilt:

$$1 + q + q^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{(siehe §4)}$$

(2) **Harmonische Reihe**: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ konvergiert **nicht**.

Genauer: Die Partialsummen $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ divergieren gegen ∞.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2^k$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + ... + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + ... + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit divergiert s_n gegen ∞. Man hat sogar $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n = \infty = \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$.

(3) **Die Zahl e**: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n =: e = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$

Wir haben die Euler-Zahl e durch das erste Gleichheitszeichen erklärt. Wir haben die zweite Gleichung zu zeigen.

Beweis. Bezeichne $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$, $t_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Mit dem Binomialsatz gilt

$$t_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1 + \frac{1}{2!}\,\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + ... + \frac{1}{n!}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n^n}$$

$$= 1+1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Folglich haben wir $t_n \leq s_n$, , also $e = \lim_{n\to\infty} t_n \leq \liminf_{n\to\infty} s_n$.

Für $n \geq m$ gilt ferner

$$t_n \geq 1+1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

Hält man m fest, so folgt mit $n \to \infty$

$$e = \lim_{n\to\infty} t_n \geq 1+1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{m!} = s_m.$$

Läßt man nun m gegen ∞ gehen, so folgt insgesamt

$$\limsup_{m\to\infty} s_m \leq e \leq \liminf_{n\to\infty} s_n \qquad \text{also } \lim_{n\to\infty} s_n = e.$$

◇

Satz 6.1 *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $(X, \|\cdot\|)$, so gilt:*

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right\| < \epsilon \qquad \textit{für alle } n > m \geq N. \qquad (C)$$

Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum (also vollständig), so folgt aus (C) die Konvergenz der Reihe in $(X, \|\cdot\|)$.

Insbesondere ist in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ die Bedingung (C) äquivalent zur Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis. Da

$$s_n - s_m = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k,$$

folgt mit Bemerkung (3) (nach Def. 5.6) und Korollar 5.8 die Aussage. ◇

Korollar 6.2 *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so gilt $a_k \to 0$ in $(X, \|\cdot\|)$.*

Beweis. Man wähle in Satz 6.1 speziell $n = m + 1$. ◇

Zu jeder Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in (X, \| \cdot \|)$ gehört eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| a_k \|$, deren Glieder $\| a_k \| \in [0, \infty[$, also nichtnegative reelle Zahlen sind.

Korollar 6.3 *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum $(X, \| \cdot \|)$. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| a_k \|$ in $\mathbb{R}$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ in X.*

Beweis. Wegen $\| \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \| a_k \|$ folgt die Behauptung direkt mit der Äquivalenz in Satz 6.1. Konvergiert nämlich $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| a_k \|$ in $\mathbb{R}$, so existiert zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{n} \| a_k \| < \epsilon \qquad \text{für alle } n > m \geq N,$$

und damit gilt (C). ◇

Definition 6.4 *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Raum. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt* **absolut konvergent**, *falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| a_k \|$ konvergiert.*

Mit Blick auf Korollar 6.3 ist folgende hinreichende Bedingung für Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern sehr nützlich.

Proposition 6.5 *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert in $\mathbb{R}$ genau dann, wenn die Menge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ beschränkt ist.*

Beweis. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Mit Satz 4.3 folgt aus der Beschränktheit von $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Ist $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt, so divergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞. ◇

Durch Vergleich mit bekannten Reihen läßt sich oft Konvergenz zeigen.

Satz 6.6 (Majorantenkriterium) *Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente reelle Reihe mit $c_k \geq 0$. Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum $(X, \| \cdot \|)$ mit $\| a_k \| \leq c_k$ für alle $k \geq k_0$ (k_0 ein bestimmter Index), so konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Es existiert $N \geq k_0$ mit $\sum_{k=m+1}^{n} c_k < \epsilon$ für alle $n > m \geq N$, wegen Satz 6.1. Da

$$\sum_{k=m+1}^{n} \| a_k \| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k,$$

folgt wiederum mit Satz 6.1 die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\diamond$

Bemerkung. Das Majorantenkriterium beinhaltet auch das sog. Minorantenkriterium. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nicht-konvergent mit $c_k \geq 0$. Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(X, \| \cdot \|)$ mit $\| a_k \| \geq c_k$ für alle $k \geq k_0$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht absolut. Sonst wäre nämlich $(\| a_k \|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Majorante für $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Die folgenden Konsequenzen aus dem Majorantenkriterium werden meistens für Reihen in $\mathbb{K}$ formuliert. Die Verallgemeinerung für Reihen in einem Banachraum kann man sich einfach überlegen.

Korollar 6.7 (Quotientenkriterium) *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Gibt es ein reelles q mit $0 \leq q < 1$, so daß*

$$|a_{k+1}| \leq q\,|a_k| \qquad \textit{für alle } k \geq k_0,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis. Es gilt

$$|a_k| \leq q^{k-k_0}|a_{k_0}| = (|a_{k_0}|\, q^{-k_0})\, q^k$$

Da $\sum_{k=k_0}^{\infty} q^k$ konvergiert (geometrische Reihe), können wir das Majorantenkriterium verwenden und erhalten die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\diamond$

Bemerkung. Hat man nur $|a_{k+1}| < |a_k|$ für alle $k \geq k_0$, so läßt sich daraus die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ nicht herleiten.

Zum Beispiel gilt für die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ die Beziehung $|a_{k+1}| = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = |a_k|$, und für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$: $|a_{k+1}| = \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k^2} = |a_k|$. Während die harmonische Reihe divergiert, konvergiert die zweite Reihe.

Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, weil Korollar 6.7 greift. Wir haben sogar folgende Version des Quotientenkriteriums.

Korollar 6.8 *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Gilt $\limsup\limits_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.*

Gilt $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ *für alle* $k \geq k_0$ *(*k_0 *geeigneter Index), so ist* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent.*

Beweis. Sei $a^* = \limsup\limits_{k\to\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$. Dann existiert q mit $a^* < q < 1$. Mit Proposition 5.19 existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < q$ für alle $k \geq k_0$. Mit Korollar 6.7 folgt die erste Behauptung. Die zweite Aussage impliziert $|a_n| \geq |a_{k_0}|$ für alle $n \geq k_0$. Also ist die Bedingung $a_n \to 0$ nicht erfüllbar. $\diamond$

Korollar 6.9 (Wurzelkriterium) *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$. *Gibt es ein* q *mit* $0 \leq q < 1$ *und ein* $c \geq 0$, *so daß*

$$|a_k| \;\leq\; c\, q^k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Beweis. Man hat nur direkt das Majorantenkriterium anzuwenden mit der konvergenten Majorante $c \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$. $\diamond$

Das Wurzelkriterium wird meistens in der folgenden Form geschrieben

Korollar 6.10 (Wurzelkriterium) *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$. *Bezeichne*

$$a^* = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Dann gilt:

(a) Ist $a^* < 1$, *dann konvergiert* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut*

(b) Ist $a^* > 1$, *dann divergiert* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis.

(a) Sei q mit $a^* < q < 1$. Mit Proposition 5.19 existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} < q$ für alle $k \geq N$. Damit gilt $|a_k| < q^k$ für alle $k \geq N$, und schließlich $|a_k| \leq c\, q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (mit $c \geq \max\{\dfrac{|a_k|}{q^k} : k = 1, ..., N\}$). Mit Korollar 6.9 folgt absolute Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

(b) Ist $1 < a^* \leq \infty$, so existiert eine Teilfolge mit $\sqrt[n_m]{|a_{n_m}|} \to a^*$ mit $m \to \infty$. Damit $|a_n| > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent, da $a_k \to 0$ nicht möglich ist.

$\diamond$

Bemerkung. $a^* = 1$ in Korollar 6.10 erlaubt keine Aussage zur Konvergenz oder Divergenz. (Betrachte wieder $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$).

Das Wurzelkriterium (6.10) hat einen größeren Anwendungsbereich als das Quotientenkriterium (6.8) (siehe Übungsblatt).

Wir haben nämlich folgenden Sachverhalt (Nachweis in Übungen)

Proposition 6.11 *Für jede Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen gilt:*

$$(i) \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$$

$$(ii) \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

Wir sind nun in der Lage, über Potenzreihen wichtige Funktionen einzuführen.

Definition 6.12 *Ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \,, \qquad z \in \mathbb{C}$$

eine **Potenzreihe**. *Die c_k heißen Koeffizienten der Reihe.*

Wir werden gleich sehen, daß jede Potenzreihe für alle z im Inneren eines Kreises konvergiert und für z aus dem Äußeren divergiert.

Satz 6.13 *Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ eine Potenzreihe. Setze $\alpha = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ und $R = \frac{1}{\alpha}$. (Dabei ist $R = \infty$, falls $\alpha = 0$ und $R = 0$, falls $\alpha = \infty$). Dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ für $|z| < R$ absolut und divergiert für $|z| > R$.*

Beweis. Setze $a_k = c_k z^k$. Mit dem Wurzelkriterium konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut, falls $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |z| \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} < 1$, und divergiert für $|z| \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 1$. Das ist exakt die Behauptung. $\diamond$

Bemerkung. R wird **Konvergenzradius** von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ genannt. Man kann R auch definieren als diejenige Zahl $R \in [0, \infty]$, für die gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \begin{cases} \text{konvergiert absolut für } |z| < R \\ \text{divergiert für } |z| > R. \end{cases}$$

Damit kann man den Konvergenzradius R von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ auch schreiben als

$$R \;=\; \begin{cases} \sup\{r \geq 0 : \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k r^k \text{ konvergiert absolut } \} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{falls diese Menge beschränkt ist} \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}$$

Gelegentlich werden Potenzreihen mit allgemeinem Entwicklungspunkt z_0 betrachtet, d.h. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \, (z - z_0)^k$.

Beispiele:

(1) $\exp(z) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}$

heißt **Exponentialreihe**. Sie hat den Konvergenzradius $R = \infty$, konvergiert absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$.
(denn: $\dfrac{|z^{k+1}|\;k!}{(k+1)!\;|z|^k} \;=\; \dfrac{|z|}{k+1} \;\to 0$ und mit dem Quotientenkriterium 6.8 folgt die Konvergenz für jedes $z \in \mathbb{C}$).

(2) $\sin(z) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,\dfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \;= z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots \qquad (z \in \mathbb{C})$

die **Sinusreihe**, und

$$\cos(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,\frac{z^{2k}}{(2k)!} \;=\; 1 \;-\; \frac{z^2}{2!} \;+\; \frac{z^4}{4!} - \ldots$$

die **Kosinusreihe** konvergieren absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$.
(denn die Exponentialreihe ist jeweils konvergente Majorante).
Also ist jeweils $R = \infty$.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k}$ hat Konvergenzradius $R = 1$

(4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k z^k$ hat Konvergenzradius $R = 0$

(5) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ (die geometrische Reihe) hat Konvergenzradius $R = 1$

(6) Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ haben wir bisher nur für $n \in \mathbb{N},\; k \in \mathbb{N}_0$ definiert.
Setze für $s \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$

$$\binom{s}{k} := \begin{cases} \dfrac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} & \text{für } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Die **Binomialreihe zum Exponenten $s \in \mathbb{C}$** ist definiert durch

$$B_s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k \;=\; 1 + sz + \frac{s(s-1)}{2!} z^2 + \ldots$$

Beachte, daß für $s \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\binom{s}{k} = 0$ falls $k > s$. Insbesondere gilt für $s = n$ (vgl. Korollar 1.4)

$$B_n(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^n \;=\; (1+z)^n, \qquad z \in \mathbb{C}$$

Für $s \notin \mathbb{N}_0$ hat die Potenzreihe $B_s(z)$ den Konvergenzradius $R = 1$. Es ist nämlich

$$\frac{\left|\binom{s}{k+1} z^{k+1}\right|}{\left|\binom{s}{k} z^k\right|} \;=\; |z|\,\frac{|s-k|}{k+1} \;=\; |z|\,\left|\frac{s}{k+1} \;-\; \frac{k}{k+1}\right| \;\to |z| \qquad \text{mit } k \to \infty,$$

also liegt absolute Konvergenz vor für $|z| < 1$, und Divergenz für $|z| > 1$.

Wir werden noch einige sehr nützliche Konvergenzkriterien herleiten. Zuerst verallgemeinern wir die Beweisidee, die beim Divergenznachweis der harmonischen Reihe benutzt wurde.

Satz 6.14 (Verdichtungskriterium) *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge mit* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq 0$. *Dann konvergiert* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *genau dann, wenn* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n\, a_{2^n} \;= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + ...$ *konvergiert.*

Beweis. Wir verwenden Proposition 6.5 und zeigen deshalb die Beschränktheit der jeweiligen Partialsummen. Bezeichne

$$s_n \;=\; a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad \text{und } t_m \;=\; a_1 + 2a_2 + ... + 2^m a_{2^m}$$

Für $n \leq 2^m$ gilt:

$$\begin{aligned} s_n \;&\leq\; a_1 + \;(a_2 + a_3) + ... + \;(a_{2^m} + ... + a_{2^{m+1}-1}) \\ &\leq\; a_1 + 2a_2 + ... + 2^m a_{2^m} \;= t_m \end{aligned}$$

Andererseits gilt für $n \geq 2^m$

$$\begin{aligned} s_n \;&\geq a_1 + a_2 + \;(a_3 + a_4) + ... + \;(a_{2^{m-1}+1} + ... + a_{2^m}) \\ &\geq\; \frac{1}{2}a_1 \;+ \frac{1}{2}2a_2 \;+ \frac{1}{2}4a_4 + ... + \frac{1}{2}2^m a_{2^m} \;= \frac{1}{2}t_m \end{aligned}$$

Damit sind die Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ entweder beide beschränkt oder beide unbeschränkt. ◇

Beispiele:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$, $s \in \mathbb{Q}$ (vorläufig) konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.

Für $s \leq 0$ gilt nicht $\dfrac{1}{n^s} \to 0$, also gilt Divergenz.

Sei also $s > 0$. Wir betrachten die "verdichtete" Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n\, \dfrac{1}{2^{ns}} \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{(1-s)n}$. Wir haben $2^{(1-s)} < 1$ genau dann, wenn $1 - s < 0$, also $s > 1$. Mit der Konvergenz bzw. Divergenz der geometrischen Reihe folgt die Behauptung.

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^s}$ konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.

Da $\ln(n)$ monoton wächst, können wir Satz 6.14 anwenden. Für $s \leq 0$ ist die harmonische Reihe eine Minorante. Sei $s > 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, \frac{1}{2^n\,(\ln 2^n)^s} \;= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^s} \;=\; \frac{1}{(\ln 2)^s}\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

und mit (1) folgt die Behauptung.

Als nächstes wenden wir uns Reihen zu, deren Glieder Produkte sind. Ein wichtiges Hilfsmittel ist

Lemma 6.15 (Abelsche partielle Summation)
(Niels Henrik Abel, 1802-1829, Norwegen)
Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *zwei Folgen in* $\mathbb{K}$. *Bezeichne* $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $A_{-1} = 0$ *die* n*-te Partialsumme der Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. *Dann gilt für alle* $m, n \in \mathbb{N}_0,\ m < n$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k\, b_k \;=\; \sum_{k=m}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1}) \;+ A_n b_n \;- A_{m-1} b_m \qquad (A)$$

Beweis.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k \;=\; \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1})\, b_k \;=\; \sum_{k=m}^{n} A_k b_k \;-\; \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$
$$=\; \sum_{k=m}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1}) \;+ A_n b_n - A_{m-1} b_m.$$

◇

Satz 6.16 (Dirichlet)
(Johann Peter Gustav (Lejenne) Dirichlet, 1805-1859, Berlin, Göttingen)

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *zwei Folgen in* $\mathbb{K}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Partialsummen $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *bilden eine beschränkte Folge.*

(ii) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$ *und*

(iii) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, b_k$.

Beweis. Sei $M := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |A_n|$. Sei $\epsilon > 0$. Mit (iii) existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $b_N < \dfrac{\epsilon}{2M}$. Ist $n \geq m \geq N$, so folgt mit (ii) und (6.15):

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \;=\; \left|\sum_{k=m}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1}) \;+ A_n b_n \;- A_{m-1} b_m\right|$$
$$\leq\; M \left(\sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) \;+ b_n + b_m\right) \;=\; 2M\, b_m \;\leq 2M\, b_N \;< \epsilon$$

Mit dem Cauchy-Kriterium (Satz 6.1) folgt die Konvergenz. ◇

Korollar 6.17 *Sei* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine reelle Folge mit*

(i) $|c_1| \ \geq \ |c_2| \ \geq \ |c_3| \ \geq ...$

(ii) $c_{2k-1} \geq 0, \ c_{2k} \leq 0$ *für* $k = 1, 2, 3, ...$

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0.$

Dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$.

Beweis. Man hat nur Satz 6.16 anzuwenden mit $a_n = (-1)^{n+1}$ und $b_k = |c_k|$. $\diamond$

In Korollar 6.17 haben wir **alternierende Reihen**, vergleiche (ii).
Dieses Resultat läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Korollar 6.18 *Ist* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$.
(Leibniz-Kriterium)

Mit Satz 6.16 können wir auch in vielen Fällen die Konvergenz von Potenzreihen auf dem Kreis mit Radius R klären.

Korollar 6.19 *Sei der Konvergenzradius von* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *gleich 1. Ferner sei* $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq ... \geq 0$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$. *Dann konvergiert* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \ = 1, \ z \neq 1$.

Beweis. Setze $a_n = z^n, \ b_n = c_n$. Für $|z| = 1, \ z \neq 1$ gilt

$$|A_n| \ = \ \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \ = \ \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \ \leq \ \frac{2}{|1-z|} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Somit ist Satz 6.16 anwwendbar. $\diamond$

Beispiel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k}$ ist konvergent für alle $|z| \ \leq 1, \ z \neq 1 \ \ (z \in \mathbb{C})$.

Eine Reihe der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{k^s}, \ s \in \mathbb{Q}$, heißt **Dirichletsche Reihe**. Konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{k^{s_0}}$ für ein $s = s_0$, so konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{k^s}$ für jedes $s > s_0$.
(Denn $b_k \ = \ \dfrac{1}{k^{s-s_0}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge und die Partialsummen $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{k^{s_0}}$ bilden eine beschränkte Folge. Satz 6.16 liefert die Behauptung.)

Analog zum Konvergenzradius bei Potenzreihen gibt es nun folgendes Resultat für Dirichletsche Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{k^s}$: Es gibt eine sog. Konvergenzabszisse $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß die Reihe konvergiert für $s > \lambda$ und divergiert für $s < \lambda$. Für $a_k = 1$ haben wir die Riemannsche Zeta-Funktion.

Aus der Abelschen partiellen Summation lassen sich noch weitere Konvergenzkriterien ableiten (siehe Übungsaufgaben).

Das Thema Reihen und verwandte Objekte werden wir noch öfters aufgreifen, und führen nun noch zwei weitere Banachräume ein.

Den normierten Raum $X = \ell^\infty := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K}, \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt $\}$ mit $\| a \|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ kennen wir schon.
Wir definieren

$$\ell^1 := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$$

mit Norm $\| a \|_1 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, und

$$\ell^2 := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

mit Norm $\| a \|_2 := \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$.

Daß ℓ^1 ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, und daß $\| \cdot \|_1$ eine Norm auf ℓ^1 ist, kann einfach auf direktem Wege gezeigt werden. Für ℓ^2 muß man hierzu einige Überlegungen machen.

Ist $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, so ist auch $a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n + b_n|^2 \le |a_n|^2 + 2|a_n|\,|b_n| + |b_n|^2 \le 2\,(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Desweiteren gilt in ℓ^2 eine Cauchy-Ungleichung, vgl. Proposition 5.4.

Proposition 6.20 (Cauchy-Ungleichung) *Seien* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. *Dann gilt* $ab = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ *und*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2}$$

Beweis. Mit Proposition 5.4 gilt für jedes $d \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{d} |a_n b_n| &\le \left(\sum_{n=1}^{d} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{d} |b_n|^2\right)^{1/2} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $d \in \mathbb{N}$, also ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und die Ungleichung gilt. ◇

Wie in Proposition 5.5 folgt nun die Gültigkeit der Minkowski-Ungleichung in ℓ^2 :
$\| a + b \|_2 \le \| a \|_2 + \| b \|_2$

Satz 6.21 *Die normierten Räume* $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $p = 1, 2, \infty$ *sind Banachräume.*

Beweis. Wir müssen nur noch die Vollständigkeit zeigen.
Sei $p = 1, 2,$ oder ∞, und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in ℓ^p. ($a_n \in \ell^p$!) Das heißt, zu $\epsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\| a_n - a_m \|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k} - a_{m,k}|^p \right)^{1/p} < \epsilon \qquad \text{für } m, n \geq N \quad (p = 1, 2)$$

$$\| a_n - a_m \|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_{n,k} - a_{m,k}| < \epsilon \qquad \text{für } m, n \geq N \quad (p = \infty)$$

Damit ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Also existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $\alpha_k := \lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k}$.

Dann gilt $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, $p = 1, 2, \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \overset{\|\cdot\|_p}{=} \alpha$.

Denn mit $m \to \infty$ gilt für alle $n \geq N$ und $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{l} |a_{n,k} - \alpha_k|^p \leq \epsilon^p \qquad \text{bzw.} \sup_{k=1,\ldots,l} |a_{n,k} - \alpha_k| \leq \epsilon$$

Damit gilt auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k} - \alpha_k|^p \leq \epsilon^p \qquad \text{bzw.} \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_{n,k} - \alpha_k| \leq \epsilon$$

für alle $n \geq N$, woraus die Behauptung folgt. $\diamond$

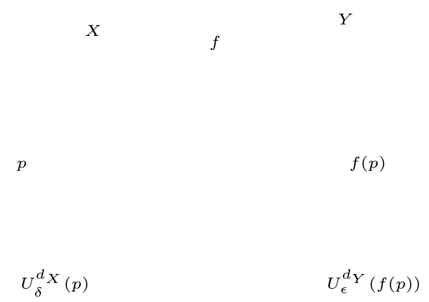
7 Stetigkeit

Wir führen die Stetigkeit von Abbildungen gleich für metrische Räume ein.

Definition 7.1 *Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume, $p \in X$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. f heißt stetig in p, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$d_y(f(x), f(p)) \; < \epsilon \qquad \textit{für alle } x \in X \;\; \textit{mit } d_x(x,p) < \delta$$

Ist f stetig in allen Punkten $p \in X$, so heißt f stetig auf X.



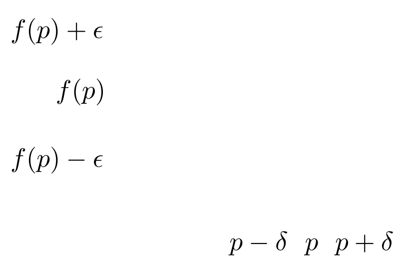
Beachte: δ hängt von ϵ und $p \in X$ ab.

Man sieht: f ist stetig in p genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f\left(U_\delta^{d_x}(p)\right) \;\subseteq\; U_\epsilon^{d_y}(f(p))$$

Ist z.B. $X = M \subseteq \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$ (jeweils mit der üblichen Metrik), so heißt Stetigkeit in $p \in M$: Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$f(\,]p-\delta, p+\delta[\,) \;\subseteq\;]f(p)-\epsilon, f(p)+\epsilon[\;.$$



Beispiele:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ (konstant) ist stetig (denn es gilt immer $|f(x) - f(p)| = 0 \; < \epsilon$).

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ ist stetig (denn: Zu $\epsilon > 0$ kann man $\delta = \epsilon$ wählen. Aus $|x-p| < \delta$ folgt dann immer $|f(x) - f(p)| = |x-p| < \delta = \epsilon$.)

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist stetig (denn: Sei $p \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0$. Dann wähle $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2|p|+1}\}$. Ist dann nämlich $|x-p| < \delta$, so gilt

$$|f(x) - f(p)| = |x^2 - p^2| = |x-p|\,|x+p| \le (|x| + |p|)\,|x-p|$$

$$\le (|x-p| + 2|p|)\,|x-p| \le (1+2|p|)\,|x-p| < \epsilon.$$

$$\nwarrow \quad (\text{denn } |x| \le |x-p| + |p|\ )$$

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

ist nicht stetig in $p = 0$ (denn für $\epsilon \le 1$ gibt es kein $\delta > 0$, so daß $\operatorname{sgn}(\,]-\delta,\delta[\,) \subseteq\ ]-\epsilon,\epsilon[$, weil $\operatorname{sgn}(\,]-\delta,\delta[\,) = \{-1,0,1\}$).

(5) Sei (M,d) ein metrischer Raum, $f : M \to M,\ f(x) = x$ (die Identität). Wie in Beispiel 2 zeigt man, daß f stetig ist.

(6) Sei (M,d) ein metrischer Raum, $b \in M$ ein fester Punkt. Die Funktion $f : M \to \mathbb{R},\ f(x) = d(x,b)$ ist stetig.
(Ist nämlich $p \in M,\ \epsilon > 0$, so wähle $\delta = \epsilon$. Ist dann $d(x,p) < \delta$, so folgt $|f(x) - f(p)| = |d(x,b) - d(p,b)| \le d(x,p) < \delta = \epsilon$, wobei die Dreiecksungleichung benutzt wurde.

(7) Sei $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ der d-dimensionale Euklidische Raum. Bezeichne für $j = 1,...,d$ mit $\phi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ \phi_j(x) = x_j$, falls $x = (x_1,...,x_d)$, die Projektion auf die j-te Koordinate (Koordinatenfunktion). Die ϕ_j sind stetig.
(Denn $|\phi_j(x) - \phi_j(p)| \le \| x-p \|_2$, also wähle $\delta = \epsilon$).

(8) Sei $\phi_j : \ell^2 \to \mathbb{K},\ \phi_j(a) = a_j$ für $a = (a_1,...,a_j,...) \in \ell^2,\quad j \in \mathbb{N}$. Auch diese Koordinatenfunktionen sind stetig.

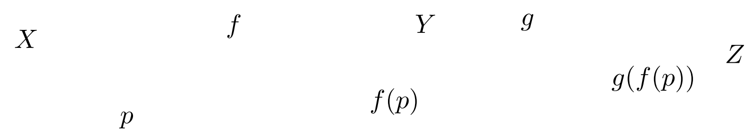
Wir leiten nun eine Charakterisierung der Stetigkeit her, die es erlaubt, mit Folgen zu arbeiten.

Satz 7.2 *Seien (X,d_x), (Y,d_y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $p \in X$. f ist genau dann in p stetig, wenn für jede gegen p konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen $f(p)$ konvergiert.*

Beweis. Sei f stetig in $p \in X$, und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $p = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so daß $d_y(f(x), f(p)) < \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $d_x(x,p) < \delta$. Nun existiert zu δ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_x(x_n,p) < \delta$ für alle $n \ge N$. Damit folgt $d_y((f(x_n), f(p)) < \epsilon$ für alle $n \ge N$, d.h. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$.

Für die umgekehrte Implikation setzen wir f nicht stetig in p voraus. Das heißt: Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ Punkte $x \in X$ existieren, für die sowohl $d_x(x,p) < \delta$ als auch $d_y(f(x), f(p)) \geq \epsilon$ gilt. Insbesondere existiert zu jedem $\delta = \dfrac{1}{n}$ ein $x_n \in X$ mit $d_x(x_n, p) < \dfrac{1}{n}$ und $d_y(f(x_n), f(p)) \geq \epsilon$. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen p in X, aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent gegen $f(p)$ in Y. ◇

Satz 7.3 *Seien (X, d_x), (Y, d_y) und (Z, d_z) drei metrische Räume, $p \in X$. Ist $f : X \to Y$ in p stetig, und $g : Y \to Z$ in $f(p) \in Y$ stetig, so ist die Komposition $g \circ f : X \to Z$ in p stetig.* $(g \circ f(x) := g(f(x)))$



Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt $\eta > 0$ mit $g(U_\eta^{d_y}(f(p))) \subseteq U_\epsilon^{d_z}(g(f(p)))$, weil g stetig in $f(p) \in Y$ ist. Zu $\eta > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $f(U_\delta^{d_x}(p)) \subseteq U_\eta^{d_y}(f(p))$, da f stetig in p ist. Zusammen haben wir

$$g \circ f(U_\delta^{d_x}(p)) \subseteq g(U_\eta^{d_y}(f(p))) \subseteq U_\epsilon^{d_z}(g \circ f(p)).$$

◇

Eine weitere Verknüpfung stetiger Funktionen erhalten wir, wenn $\mathbb{K}$-wertige Funktionen vorliegen. Sind $f : X \to \mathbb{K}$, $g : X \to \mathbb{K}$ (X metrischer Raum), $\lambda \in \mathbb{K}$, so sind durch

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda\, f(x), \qquad (fg)(x) = f(x)\, g(x)$$

Abbildungen $f + g : X \to \mathbb{K}$, $\lambda f := X \to \mathbb{K}$, $fg : X \to \mathbb{K}$ definiert. Ist $f : X \to \mathbb{K}$ immer ungleich 0, so ist $\dfrac{1}{f} : X \to \mathbb{K}$ definiert durch $\dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Satz 7.4 *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $f : x \to \mathbb{K}$ und $g : X \to \mathbb{K}$ stetig in $p \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind auch $f + g$, λf und fg stetig in p. Verschwindet f nirgends, so ist auch $\dfrac{1}{f}$ in p stetig.*

Beweis. Wir verwenden das "Folgenkriterium" Satz 7.2. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen p, so auch $f(x_n)$ gegen $f(p)$ und $g(x_n)$ gegen $g(p)$ in $\mathbb{K}$. Mit Satz 4.4 konvergiert $(f+g)(x_n)$ gegen $(f+g)(p)$, $\lambda f(x_n)$ gegen $\lambda f(p)$ und $fg(x_n)$ gegen $fg(p)$ und (bei der gemachten Voraussetzung) $\dfrac{1}{f}(x_n)$ gegen $\dfrac{1}{f(p)}$. ◇

Beispiele:

(1) Mit Satz 7.4 sind alle Polynome $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, stetig.

(2) Seien $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Polynome. Ist $M = \{x \in \mathbb{R} : \ Q(x) \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}$, so ist $\dfrac{P}{Q} : M \to \mathbb{R}$ stetig.

Es liegt auf der Hand zu fragen, ob durch Potenzreihen bestimmte Funktionen im Inneren des Konvergenzkreises stetig sind. In diesem Zusammenhang ist es nützlich, einen weiteren normierten Raum einzuführen. Sei M eine (beliebige) Menge, und bezeichne

$$B(M) := \ \{f : M \to \mathbb{K} : \ \{f(x) : x \in M\} \text{ ist beschränkt in } \mathbb{K}\}$$

$B(M)$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit $f+g$, λf wie vorher). Sei

$$\| \, f \, \|_M = \sup_{x \in M} |f(x)|$$

Man sieht sofort, daß $\| \cdot \|_M$ eine Norm auf $B(M)$ ist.

Satz 7.5 *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $p \in X$. Ferner seien $f_n : X \to \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ in p stetige Funktionen auf X, die auch alle beschränkt sind (also $f_n \in B(X)$). Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| \, f_n \, \|_X$, so ist durch*

$$f(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in X,$$

eine in p stetige Funktion definiert.

Beweis. Für jedes $x \in X$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| \, f_n \, \|_X$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; also ist $f : X \to \mathbb{K}$ erklärt (wohldefiniert). Bleibt die Stetigkeit in $p \in X$ zu zeigen:

Für jedes $x \in X$ gilt

$$|f(x) - f(p)| \ \leq \ |\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \ - \ \sum_{n=1}^{N} f_n(p)| \ + \ \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \ + \ \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(p)|$$

für beliebiges $N \in \mathbb{N}$. Sei $\epsilon > 0$. Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| \, f_n \, \|_X$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \| \, f_n \, \|_X < \dfrac{\epsilon}{3}$. Damit ist $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \ < \dfrac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in X$. Somit haben wir

$$|f(x) - f(p)| \ \leq \ |\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \ - \sum_{n=1}^{N} f_n(p)| \ + \ \frac{2}{3}\,\epsilon.$$

Wähle nun $\delta > 0$, so daß $|\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x) \ - \ \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(p)| \ < \dfrac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in X$ mit $d(x,p) < \delta$. Dann gilt $|f(x) - f(p)| \ < \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(x,p) < \delta$. $\diamond$

Korollar 7.6 *Jede Potenzreihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *stellt im Inneren des Konvergenzkreises* $U_R(0)$ *eine stetige Funktion dar.*

Beweis. Sei $z \in U_R(0)$. Wähle r mit $|z| < r < R$. Die Funktionen $f_k(z) = c_k z^k$ sind auf $X = U_r(0)$ beschränkt und stetig (in z). Ferner gilt $\| f_k \|_X = |c_k| r^k$, also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| f_k \|_X = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\, r^k < \infty,$$

da die Potenzreihe in $U_R(0)$ absolut konvergiert. Nun wende Satz 7.5 an. $\diamond$

Bemerkung: Die im Beweis benutzte Einschränkung auf $U_r(0)$ ist notwendig, da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \| f_k \|_{U_R(0)}$ divergieren kann (z.B. betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$).

Mit Korollar 7.6 sind stetig:

(1) exp: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(2) sin: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(3) cos: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(4) $B_s : U_1(0) \to \mathbb{C}$ (B_s Binomialreihe zum Exponenten $s \in \mathbb{C}$)

(5) $z \mapsto a^z = \exp(z \cdot \ln a)$ (allgemeine Potenz zu $a > 0$; vgl. H33, Blatt9)
$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Als nächstes zeigen wir eine wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen.

Satz 7.7 (Nullstellensatz) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$ *(bzw.* $f(a) > 0$ *und* $f(b) < 0$*). Dann existiert mindestens ein* $x_0 \in \,]a, b[$ *mit* $f(x_0) = 0$.

Beweis. Wir verwenden eine Intervallschachtelung, um eine Nullstelle von f zu finden. Sei $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$ mit $f(a_n) < 0$, $f(b_n) \geq 0$ und wie üblich mit $I_n \subseteq I_{n+1}$, $|I_n| = \frac{1}{2^n} |I_0|$.

Setze $I_0 = [a, b]$. Sei I_n bereits gefunden (mit den angegebenen Eigenschaften). Setze $m = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, und definiere

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, m] & \text{falls } f(m) \geq 0 \\ [m, b_n] & \text{falls } f(m) < 0 \end{cases}$$

Damit haben wir eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$.

Sei $\{x_0\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$. Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

Da f stetig ist, gilt mit Satz 7.2:

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) \;=\; f(x_0) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(b_n) \;\geq 0,$$

also $f(x_0) = 0$. ◇

Korollar 7.8 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $c \in \,]f(a), f(b)[$, falls $f(a) < f(b)$ (bzw. $c \in \,]f(b), f(a)[$, falls $f(b) < f(a)$). Dann existiert ein $x_0 \in \,]a,b[$ mit $f(x_0) = c$.*

Beweis. Betrachte $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - c,$ und wende Satz 7.7 auf g an. ◇

Anschaulich besagt der Zwischenwertsatz (ZWS), daß f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt. D.h. ist $f(a) \leq f(b)$, so ist $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$ und ist $f(a) > f(b)$, so ist $[f(b), f(a)] \subseteq f([a,b])$.

Korollar 7.9 (Fixpunktsatz) *Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $a \leq f(x) \leq b$ für alle $x \in [a,b]$. Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $a < f(a)$ und $f(b) < b$. Betrachte $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - x$. g ist stetig und $g(a) > 0,\ g(b) < 0$. Mit Satz 7.7 existiert $x_0 \in \,]a,b[$ mit $g(x_0) = 0$, d.h. $f(x_0) = x_0$. ◇

An dieser Stelle sei an den Fixpunktsatz von Banach (vgl. Z19, Blatt 7) erinnert. Fixpunktsätze sind wichtige mathematische Instrumente.

Wir untersuchen noch die Exponentialfunktion, die wir durch ihre Potenzreihe erklärt haben, und von der wir in den Übungen einiges erfahren haben: Die wichtigste Eigenschaft ist die Funktionalgleichung

(i) $\qquad \exp(z+w) \;=\; \exp(z)\,\exp(w) \qquad$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ (vgl. Z24)

Es gilt auch die Eulersche Formel (Leonhard Euler, 1707-1783, Berlin, St. Petersburg), die die Beziehung zu cos und sin herstellt:

(ii) $\qquad \exp(iz) \;=\; \cos(z) \;+\; i\sin(z) \qquad$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (vgl. T31)

Desweiteren wissen wir auch

(iii) $\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \;=\; \exp(z) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \qquad$ (vgl. Z22)

(iv) $\qquad |\exp(ix)| \;=1 \qquad$ für $x \in \mathbb{R}$

Schränken wir uns auf $\mathbb{R}$ ein, so erhält man den bekannten Graphen von $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$

Begründung: Ist $x > 0$, so gilt $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... > x$, also ist $\exp(\mathbb{R})$ nach oben unbeschränkt. Außerdem gilt $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} < \frac{1}{x}$. Mit dem ZWS liegen alle $y > 0$ in $\exp(\mathbb{R})$. Ist $x_1 < x_2$, so gilt $\exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2 - x_1) = \exp(x_1)\ \exp(x_2 - x_1) > \exp(x_1)$, da $\exp(x_2 - x_1) > 1$.

Damit ist $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ eine bijektive Funktion (vgl. auch T22 wo $\exp(x)$ durch $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, genauer durch eine Intervallschachtelung, definiert ist). Deshalb besitzt exp eine Umkehrfunktion $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$. (D.h. $g \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \circ \exp(x) = x$ und $\exp \circ g :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $\exp \circ g(y) = y$). Nun ist $g = \ln$, vgl. Proposition 4.7, Satz 4.8. Mit T22b) wissen wir $\ln(\exp(x)) = x$. Für $y > 0$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$. Dann gilt auch $\exp(\ln(y)) = \exp(x) = y$.
Wir wissen bereits (H20b), daß ln stetig ist. Dies würde auch aus folgendem allgemeinen Satz direkt folgen.

Satz 7.10 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Bezeichne $M := f(I)$. Dann ist $f : I \to M$ bijektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : M \to I$ ist stetig. (Streng monoton wachsend heißt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$). (Beachte: f ist* **nicht** *als stetig vorausgesetzt).*

Beweis. Wir haben nur die Stetigkeit von f^{-1} zu zeigen. Sei f streng monoton wachsend. Sei $p \in M$ fest und $a \in I$ mit $f(a) = p$. Zu zeigen haben wir:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0 :\ \ \forall\, x \in I\ \text{ mit }\ |f(x) - p| < \delta\ \Rightarrow\ |x - a| < \epsilon$$

Dabei können wir diese Behauptung in zwei Situationen aufspalten:

(i) $\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, \delta_1 > 0 :\ \ \forall\, x \in I,\ x < a$ mit $p - f(x) < \delta_1 \Rightarrow a - x < \epsilon$

(ii) $\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, \delta_2 > 0 :\ \ \forall\, x \in I,\ x > a$ mit $f(x) - p < \delta_2 \Rightarrow x - a < \epsilon$

$p + \delta_2$ $\qquad$ f

p

$p - \delta_1$

$a + \epsilon \quad a \quad a + \epsilon$

Wir überlegen uns nur den ersten Fall.

Ist $a \in I$ linker Randpunkt von I, so ist für (i) nichts zu zeigen. Ist also $a \in I$ nicht linker Randpunkt von I, so wähle ein $b \in I,\ b < a$, mit $a - b \leq \epsilon$, und setze $\delta_1 = p - f(b)$. Ist dann $x \in I,\ x < a$ mit $p - f(x) < \delta_1$, so ist $f(b) < f(x) \quad (p - f(b) = \delta_1 > p - f(x))$, also $b < x$ (wegen der Monotonie). dann folgt $a - x < a - b \leq \epsilon$; also ist (i) nachgewiesen.

$\diamond$

Bemerkung: Beachte, daß $f(I) = M$ kein Intervall zu sein braucht. Wird in Satz 7.10 zusätzlich f als stetig vorausgesetzt, so ist $M = f(I)$ wegen dem ZWS ein Intervall.

Beispiele:

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$. $f : [0,\infty[\to [0,\infty[,\quad f(x) = x^n$ ist streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion ist die $n-$te Wurzelfunktion $f^{-1} : [0,\infty[\to [0,\infty[\,,\quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Mit Satz 7.10 ist diese stetig und streng monoton wachsend.

(2) Die Wurzelfunktion ist ein Spezialfall der Potenzfunktionen. Für $x > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ setzt man (vgl. H33)

$$x^z := \exp(z \ln x)$$

Ist speziell $x = e$, so hat man $e^z = \exp(z) \qquad$ (da $\ln e = 1$)

Es gelten (siehe H33)

$$x^1 = x, \quad x^0 = 1, \quad x^z\, x^w = x^{z+w}, \qquad x^{-z} = \frac{1}{x^z}, \quad (xy)^z = x^z\, y^z \quad (y > 0)$$

und für $x > 0,\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}$ gilt: $(x^y)^z = x^{yz}$
(letzteres gilt wegen

$$(x^y)^z = (\exp(y \ln x))^z = \exp(z \ln(\exp(y \ln x))) = \exp(zy \ln x) = x^{yz}\ )$$

Ist $z = \alpha > 0$, so ist $x \to x^\alpha,\quad]0,\infty[\to]0,\infty[$ eine streng monoton wachsende, stetige Bijektion.
Die zugehörige Umkehrfunktion ist $x \to x^{1/\alpha},\quad]0,\infty[\to]0,\infty[$
(denn: $(x^\alpha)^{1/\alpha} = x^{\alpha \frac{1}{\alpha}} = x^1 = x$).

Wir haben noch zu überlegen, daß für $n \in \mathbb{N}$ die beiden Definitionen $x^n := x \cdots x$ und $x^n := \exp(n \ln x)$ übereinstimmen. Dies ist aber klar, da $\exp(n \ln x) = \exp(\ln x + ... + \ln x) = \exp(\ln x) \cdots \exp(\ln x) = x \cdots x$.

Damit stimmt die Umkehrfunktion $x^{1/n}$ auch mit $\sqrt[n]{x}$ (für $x > 0$) überein.

Wir führen noch übliche Schreibweisen ein:

Seien (X, d_x), (Y, d_y) metrische Räume, $D \subseteq X$ und $f : D \to Y$. Gilt $f(x_n) \to c \in Y$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n \to p$ (p fester Punkt aus X, nicht notwendig aus D), so schreibt man

$$\lim_{x\to p} f(x) = c \qquad \text{(bei Stetigkeit in } p \text{ ist } c = f(p))$$

Ist speziell $X = \mathbb{R}$, so bedeutet $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$, daß $f(x_n) \to c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$ mit $x_n \to \infty$ (analog: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$)

Schließlich (bei $X = \mathbb{R}$) bedeutet $\lim\limits_{x\to p+0} f(x) = c$, daß $f(x_n) \to c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$, $x_n \geq p$ mit $x_n \to p$, und $\lim\limits_{x\to p-0} f(x) = c$, daß $f(x_n) \to c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$, $x_n \leq p$ mit $x_n \to p$.

Satz 7.11 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Für jedes $p \in \,]a, b[$ existieren*

$$f(p + 0) := \lim_{x\to p+0} f(x) \qquad \textit{und} \qquad f(p - 0) := \lim_{x\to p-0} f(x)$$

und es gilt:

$$f(p - 0) \leq f(p) \leq f(p + 0).$$

Für die beiden Randpunkte gilt: $f(a + 0) := \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ und $f(b - 0) := \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ existieren, und es gilt $f(a) \leq f(a + 0)$ und $f(b - 0) \leq f(b)$. (Entsprechende Aussagen gelten für monoton fallende Funktionen).

Beweis. Sei $p \in \,]a, b[$. Da f monoton wachsend ist, existiert $c := \sup\{f(x) : x \in [a, p[\,\}$, und es gilt $c \leq f(p)$. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $x_1 \in [a, p[$ mit $c-\epsilon \leq f(x_1) \leq c$. Für $x \in [x_1, p[$ gilt deshalb

$$c - \epsilon \leq f(x_1) \leq f(x) \leq c$$

Setzt man $\delta = p - x_1 > 0$, so folgt (in der $\epsilon - \delta$-Definition, vgl. Satz 7.2) $\lim\limits_{x\to p-0} f(x) = c$. Die anderen Nachweise sind analog zu führen. $\diamond$

Wir erwähnen noch, daß für $\lim\limits_{x\to p} f(x)$, $\lim\limits_{x\to p\pm 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ entsprechend Satz 7.4 Rechenregeln gelten:
z.B. ist $\lim\limits_{x\to p} f(x) = c \in \mathbb{K}$, $\lim\limits_{x\to p} g(x) = b \in \mathbb{K}$, so gelten

$$\lim_{x\to p} (f + g)(x) = c + b, \qquad \lim_{x\to p} (f \cdot g)(x) = a\, b$$

und falls $b \neq 0$: $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{a}{b}$.

8 Stetige Funktionen und Kompaktheit

Erinnern wir uns an den Nachweis der Stetigkeit von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$ in $p \in \mathbb{R}$, so haben wir bei der Bestimmung von $\delta > 0$ zu $\epsilon > 0$ auch den Punkt $p \in \mathbb{R}$ benutzt. Schränken wir f auf $[a, b]$ ein, so könnten wir $\delta > 0$ unabhängig von $p \in [a, b]$ bestimmen.Wir betrachten nun Definitionsbereiche von f, die diese und verwandte Eigenschaften von $[a, b]$ erfüllen. Zur Motivation wollen wir noch kurz bei $[a, b]$ bleiben:

(1) Da $[a, b]$ beschränkt ist, besitzt jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwert in $[a, b]$ liegt (da die Randpunkte zur Menge $[a, b]$ gehören. Für $]a, b[$ gilt dies nicht, obwohl $]a, b[$ beschränkt ist).

(2) Ist $\epsilon > 0$ gegeben (beliebig klein), so reichen endlich viele Punkte $x_1, ..., x_n \in [a, b]$, so daß $[a, b] \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n}]x_k - \epsilon, x_k + \epsilon[$.

(3) Ist $(I_k)_{k\in J}$ (J Index-Menge), I_k offene Intervalle mit $[a, b] \subseteq \bigcup\limits_{k\in J} I_k$, so reichen bereits endlich viele $k_1, ..., k_n \in J$ aus, um $[a, b]$ zu überdecken. (Dies müssen wir momentan noch glauben).

Diese drei Eigenschaften wollen wir gleich für metrische Räume präzise erklären. (1) und (2) gehen ohne Umschweife.

Definition 8.1 *Sei (X, d_x) ein metrischer Raum.*

(1) (X, d_x) heißt **folgenkompakt**, *falls jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt.*

(2) (X, d_x) heißt **total beschränkt**, *falls für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Menge von Punkten $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ existiert, so daß $K \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_\epsilon(x_k)$. Die endliche Menge $\{x_1, ..., x_n\}$ heißt* **ϵ−Netz**.

Bevor wir die Eigenschaft (3) formulieren, benötigen wir die exakten Begriffe "offen" und "abgeschlossen" in metrischen Räumen. Im folgenden werden wir uns an neue mathematische Aufgaben besonders mit Teilmengen von X gewöhnen müssen.

Definition 8.2 *Sei (X, d_x) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt* **offen in X**, *wenn es zu jedem $a \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $U_\epsilon(a) \subseteq U$. (Die leere Menge $\emptyset$ ist auch offen).*

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen in X**, *wenn $X \backslash A$ offen in X ist.*

Eine Menge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung von a $\in$ X**, *falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_\epsilon(a) \subseteq U$. (Insbesondere ist $U_\epsilon(a)$ für jedes $\epsilon > 0$ eine Umgebung von a in X. Diese Umgebungen heißen ϵ-Umgebungen.)*

Beispiele:

(1) In $\mathbb{R}$ sind offene Intervalle $\,]a,b[\,$ offen, und abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ abgeschlossen.

(2) In jedem metrischen Raum (X,d_x) ist X offen.

(3) In jedem metrischen Raum (X,d_x) ist $U_\epsilon(a)$ offen in X und $K_\epsilon(a)$ abgeschlossen in X.

Man beachte: es gibt stets Mengen in X, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind (z.B. X selbst). Es kann auch Teilmengen geben, die weder offen noch abgeschlossen sind (z.B. $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$).

Weitere Beispiele

(4) $[a,\infty[,\quad]-\infty,b]$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}$. $]a,\infty[,\quad]-\infty,b[$ sind offen in $\mathbb{R}$.

(5) $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\} \cup \{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

(6) Sei X eine Menge versehen mit der diskreten Metrik. Dann ist jede Teilmenge von X offen und abgeschlossen.

Satz 8.3 *Sei (X,d_x) ein metrischer Raum, U,V und U_i, $i \in I$, seien offene Mengen in X (I eine Indexmenge).*

(1) $\emptyset, X$ ist offen in X

(2) $U \cap V$ ist offen in X

(3) $\bigcup_{i\in I} U_i$ ist offen in X

Beweis.

(1) ist bereits gezeigt.

(2) Ist $x \in U \cap V$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq U$, ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq V$. Für $\eta = \min(\epsilon,\delta)$ gilt dann $U_\eta(x) \subseteq U \cap V$.

(3) Ist $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, so gilt $x \in U_{i_0}$ für (mindestens) $i_0 \in I$, und damit existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq U_i$, also $U_\epsilon(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.

◇

Satz 8.4 *Seien (X,d_x), (Y,d_y) metrische Räume, und $f : X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Dann sind äquivalent:*

(1) f ist stetig

(2) Für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X

(3) Für jede abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) :

Ist $a \in f^{-1}(V)$ (V offen in Y) und $b = f(a) \in V$, so existiert ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(b) \subseteq V$. Mit der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\epsilon(b)$; also gilt $U_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$. Damit ist gezeigt, daß $f^{-1}(V)$ offen ist.

(2) $\Rightarrow$ (1) :

Sei $a \in X$, $\epsilon > 0$. Da $U_\epsilon(f(a))$ offen in Y ist, ist nach (2) auch $U := f^{-1}(U_\epsilon(f(a)))$ offen in X. Da $a \in U$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subseteq U$. Dies bedeutet $f(U_\delta(a)) \subseteq U_\epsilon(f(a))$, d.h. f ist in a stetig.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) :

Gilt (2) und ist $B \subseteq Y$ abgeschlossen, so ist $Y \backslash B$ offen in Y, also $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$ offen in X. Somit ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen, d.h. (3) gilt. Genauso zeigt man (3) $\Rightarrow$ (2). $\diamond$

Sei nun $K \subseteq (X, d_x)$. Eine **offene Überdeckung** von K ist eine Familie $\{U_i : i \in I\}$ (I Indexmenge) von offenen Teilmengen von X, so daß

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

Definition 8.5 *Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d_x) heißt* **kompakt**, *falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung von K enthält, d.h. ist $\{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von K, so existieren endlich viele Indizes $i_1, ..., i_n \in I$, so daß*

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

(Selbstverständlich kann auch $K = X$ sein.)

Betrachten wir wieder konkrete Beispiele. Sei $X = \mathbb{R}$ (mit der natürlichen Metrik). In $\mathbb{R}$ ist $\{U_n(0) : n \in \mathbb{N}\}$ $(U_n(0) =]-n, n[\,)$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$.

Mit einer **endlichen** Teilüberdeckung von $\{U_n(0) : n \in \mathbb{N}\}$ kann man sicherlich nicht ganz $\mathbb{R}$ überdecken. Also ist $\mathbb{R}$ **nicht** kompakt.

Sei wieder $X = \mathbb{R}$ und $K =]0, 1[$. Dann ist $\{\,]\frac{1}{3n}, \frac{1}{n}[\; : n \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von $]0, 1[$. Es gibt daraus keine endliche Teilüberdeckung. (Denn zu jeder endlichen

Teilüberdeckung gehören endlich viele Indizes $n_1, ..., n_k$. Aus diesen wähle den größten Index n. Dann ist $\frac{1}{4n} \notin \bigcup_{j=1}^{k}]\frac{1}{3n_j}, \frac{1}{n_j}[$). Also ist $]0,1[$ nicht kompakt.

Wir werden in Kürze sehen, daß $[0,1]$ kompakt ist. Wir werden nämlich zeigen, daß eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ genau dann kompakt ist,wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Ein erster Schritt ist der folgende Sachverhalt, der für jeden metrischen Raum gilt:

Satz 8.6 *Sei K eine kompakte Teilmenge des metrischen Raumes (X, d_x). Dann ist K abgeschlossen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $X \backslash K$ offen ist. Sei also $a \in X \backslash K$. Zu zeigen ist, daß ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(a) \cap K = \emptyset$.
Wir setzen für jedes $x \in K$: $\epsilon(x) := d(x,a)/2 > 0$.
Nun ist $\{U_{\epsilon(x)}(x) : x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, ..., x_n \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{\epsilon(x_j)}(x_j)$$

Sei $\delta = \min\{\epsilon(x_1), ..., \epsilon(x_n)\} > 0$. Damit gilt aber $U_\delta(a) \cap K = \emptyset$. Denn ist $x \in K$, so gibt es ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $x \in U_{\epsilon(x_j)}(x_j)$, also $d(x, x_j) < \epsilon(x_j)$. Folglich gilt mit der Dreiecksungleichung

$$d(x,a) \geq d(x_j,a) - d(x,x_j) > 2\epsilon(x_j) - d(x,x_j) > \epsilon(x_j) \geq \delta$$

D.h. $K \cap U_\delta(a) = \emptyset$. $\diamond$

Das nächste Resultat erleichtert den Nachweis der Kompaktheit einer Teilmenge eheblich, falls man die Kompaktheit einer "Obermenge" weiß.

Satz 8.7 *Sei K eine kompakte Teilmenge des metrischen Raumes (X, d_x). Ist $A \subseteq K$ abgeschlossen, so ist A kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von A. Dann ist $\{U_i : i \in I\} \cup \{X \backslash A\}$ eine offene Überdeckung von K, da A abgeschlossen ist. Also existieren $i_1, ..., i_n \in I$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cup (X \backslash A)$ (man braucht $X \backslash A$ eventuell nicht).
Dann ist auch $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$ (nun braucht man $X \backslash A$ nicht). $\diamond$

Bemerkung: Mit Satz 8.6 ist insbesondere allgemein gezeigt: Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt. (Zur Beschränktheit: Fixiere $a \in K$. $\{U_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ ist offene Überdeckung. Endliche Teilüberdeckung $\Rightarrow$ Beschränktheit).

Von großer Bedeutung ist der Begriff Kompaktheit in Verbindung mit der Stetigkeit.

Satz 8.8 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen (X, d_x) und (Y, d_y). Sei $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.*

Beweis. Sei $\{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$ in Y. Mit Satz 8.4 (2) ist $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von K (denn jedes $x \in K$ erfüllt $f(x) \in U_i$ für ein geeignetes $i \in I$). Also existieren $i_1, ..., i_n \in I$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{i_j})$, und daraus folgt

$$f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}.$$

◇

Korollar 8.9 *Sei (X, d_x) ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige (reell-wertige) Abbildung. Dann ist $f(X)$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Insbesondere nimmt f ihr Supremum und ihr Infimum an, d.h. es existieren $a \in X$ und $b \in X$, so daß*

$$f(a) = \sup\{f(x) : x \in X\} = \max\{f(x) : x \in X\}$$

$$f(b) = \inf\{f(x) : x \in X\} = \min\{f(x) : x \in X\}$$

Beweis. Mit Satz 8.8 ist $f(X)$ kompakt, insbesondere abgeschlossen und beschränkt. $M := \sup\{f(x) : x \in X\}$ und $m := \inf\{f(x) : x \in X\}$ existieren also in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R} \backslash f(X)$ offen ist, muß $M, m \in f(X)$ liegen.
(Wäre $M \in \mathbb{R} \backslash f(X)$, so gäbe es ein δ mit $]M - \delta, M + \delta[\subseteq \mathbb{R} \backslash f(X)$, und $M - \delta$ wäre kleinere obere Schranke von $f(X)$ als M). ◇

Korollar 8.10 *Seien (X, d_x) und (Y, d_y) zwei metrische Räume, und (X, d_x) sei kompakt. $f : X \to Y$ sei eine stetige bijektive Abbildung. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ auch stetig.*

Beweis. Wir verwenden die Stetigkeits-Charakterisierung von Satz 8.4 (3). Sei $B \subseteq X$ abgeschlossen. Mit Satz 8.7 ist B kompakt, und mit Satz 8.8 ist auch $f(B)$ kompakt in Y. Mit Satz 8.6 ist also auch $f(B) = (f^{-1})^{-1}(B)$ abgeschlossen in Y. Somit ist f^{-1} stetig.

◇

Beispiel:

$$f : [0, 2\pi[\to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \qquad f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

f ist eine bijektive Abbildung von $[0, 2\pi[$ auf $\mathbb{T}$.

i $\quad \mathbb{T}$

$f(t) = e^{it}$

t

$-1 \qquad 1$

$-i$

$\mathbb{T} = K_1(0) \backslash U_1(0)$
Da $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \sin t$ stetig sind,
ist f stetig

Die Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{T} \to [0, 2\pi[$ ist nicht stetig im Punkt $1 + i0 = 1 \in \mathbb{T}$. (Jede Umgebung von $1 + i0$ wird durch f^{-1} abgebildet auf eine Menge, die auch Punkte in der Nähe von 2π enthält!)

Nach den gezeigten Ergebnissen ist es an der Zeit, kompakte Mengen näher zu beschreiben. Notwendigerweise sind kompakte Mengen abgeschlossen und beschränkt. Für Teilmengen von $\mathbb{K}$ (oder $\mathbb{K}^n$) ist dies auch hinreichend für Kompaktheit. Vorher erinnern wir an die Eigenschaft der Intervallschachtelungen in $\mathbb{R}$.

Satz 8.11 *Sei $\{K_i : i \in I\}$ eine Familie von kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d_x), so daß die Durchschnittsmenge jeder endlichen Teilfamilie von $\{K_i : i \in I\}$ nichtleer ist. Dann ist $\bigcap\limits_{i \in I} K_i$ nichtleer. (Man vergleiche mit der Intervallschachtelungseigenschaft in $\mathbb{R}$).*

Beweis. Sei K_1 aus $\{K_i : i \in I\}$ fest gewählt, und setze $U_i := X \backslash K_i$. Wir nehmen an: $K_1 \cap \bigcap\limits_{i \in I} K_i = \emptyset$. Dann gilt $K_1 \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, d.h. $\{U_i : i \in I\}$ ist eine offene Überdeckung von K_1. Da K_1 kompakt ist, reichen endlich viele $U_{i_i}, ..., U_{i_n}$ für $K_1 \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{i_j}$. Dies bedeutet, daß $K_1 \cap \bigcap\limits_{j=1}^{n} K_{i_j} = \emptyset$ ist, ein Widerspruch. $\diamond$

Korollar 8.12 *Ist $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge kompakter (nichtleerer) Mengen eines metrischen Raumes mit $K_n \supseteq K_{n+1}$, so gilt $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.*

Satz 8.13 *In einem kompakten Raum (X, d_x) besitzt jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in X$ eine konvergente Teilfolge in X. (X ist folgenkompakt).*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich ist (sonst ist die Behauptung klarerweise erfüllt).
Wir benutzen Lemma 5.11 und nehmen an, daß kein Punkt aus X Häufungswert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Dann hat jedes $a \in X$ eine Umgebung V_a, die höchstens einen Punkt aus $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ enthält (Lemma 5.11 (2)) (nämlich x_m falls $a = x_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$). Damit kann $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ von keiner endlichen Teilfamilie von $\{V_a : a \in X\}$ überdeckt werden,

und dann erst recht nicht X, da $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Dies widerspricht der Kompaktheit von X. ◇

Wir erinnern an die Definition von folgenkompakt und total beschränkt.

Satz 8.14 *Sei (X, d_x) ein metrischer Raum. Ist X folgenkompakt, so ist X auch totalbeschränkt und vollständig.*

Beweis. Sei X folgenkompakt vorausgesetzt, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann gilt $x_{n_k} \to x$ für eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$ für alle $n, m \geq N_1$. Ferner gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$ für alle $k \geq N_2$. Setze $N = \max\{N_1, N_2\}$. Ist dann $n \geq N$, so wähle ein $k \geq N_2$ mit $n_k \geq N_1$, und man erhält

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

Damit ist gezeigt, daß X vollständig ist. Wir nehmen an, daß X nicht total beschränkt ist. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, für das es kein ϵ-Netz für X gibt. Dann läßt sich leicht eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden mit $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Sind $x_1, ..., x_n$ bereits gefunden, so erhält man x_{n+1} durch einfaches Auswählen eines Elementes aus $X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} U_\epsilon(x_k) \neq \emptyset$. Offensichtlich gilt $d(x_k, x_{n+1}) \geq \epsilon$ für alle $k = 1, ..., n$, und damit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv konstruiert. Diese Folge kann aber keine konvergente Teilfolge enthalten. Damit ist die Behauptung nachgewiesen. ◇

Sieht man 8.13 und 8.14 zusammen, so stellt sich die Frage, ob aus totaler Beschränktheit plus Vollständigkeit die Kompaktheit folgt. In der Tat gilt:

Satz 8.15 *Sei (X, d_x) ein metrischer Raum. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) X ist kompakt.

(ii) X ist folgenkompakt.

(iii) X ist total beschränkt und vollständig.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ ist mit Satz 8.13 gezeigt. $(ii) \Rightarrow (iii)$ ist genau der Inhalt von Satz 8.14. Bleibt also $(iii) \Rightarrow (i)$ zu zeigen.
Wir nehmen an, daß X nicht kompakt ist, d.h. es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i : i \in I\}$ von X, die keine endliche Teilüberdeckung von X enthält. Gestützt auf diese Annahme konstruieren wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

(1) $d(x_n, x_{n+1}) \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

(2) $U_{1/2^{n-1}}(x_n)$ kann nicht durch eine endliche Teilüberdeckung von $\{U_i : i \in I\}$ überdeckt werden.

Wir starten mit $n = 1$. Sei $\{y_1, ..., y_m\}$ ein 1-Netz. Da $X = \bigcup_{k=1}^{m} U_1(y_k)$ existiert mindestens ein $U_1(y_k),\ k \in \{1, ..., m\}$, das nicht von endlich vielen $U_i,\ i \in I$ überdeckt wird. Setze $x_1 := y_k$.
Seien $x_1, ..., x_n$ bereits gefunden, so daß (1) und (2) gelten. Mit der Übungsaufgabe (T41) ist $U_{1/2^{n-1}}(x_n)$ total beschränkt. Sei nun $\{y_1, ..., y_m\} \subseteq U_{1/2^{n-1}}(x_n)$ ein $\frac{1}{2^n}$−Netz für $U_{1/2^{n-1}}(x_n)$. Mit (2) kann $U_{1/2^{n-1}}(x_n)$ nicht durch endlich viele $U_i,\ i \in I$ überdeckt werden, also existiert ein $U_{1/2^n}(y_k)$, das auch nicht durch endlich viele $U_i,\ i \in I$ überdeckt wird. Setze $x_{n+1} = y_k$, und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den geforderten Eigenschaften ist rekursiv konstruiert. Nun ist diese Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Denn für $m > n$ gilt

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\le \frac{1}{2^{m-2}} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^{n-2}} . \end{aligned}$$

Da X vollständig ist, konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$. Sei $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$ (Überdeckung), und $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq U_{i_0}$ (offen). Mit der Konvergenz existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \ge N$. Für $y \in U_{1/2^{N-1}}(x_N)$ gilt

$$d(y, x) \le d(y, x_N) + d(x_N, x) < \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

also $U_{1/2^{N-1}}(x_N) \subseteq U_\epsilon(x) \subseteq U_{i_0}$ im Widerspruch zu (2). Damit war unsere Annahme falsch. Das heißt X ist kompakt. $\diamond$

Dieser wichtige Satz gibt uns die Charakterisierung kompakter Mengen. Speziell für Teilmengen $A \subseteq (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$ reicht es nun zu zeigen, daß $(A, \|\cdot\|_2)$ ein folgenkompakter Raum ist. Ziehen wir den Satz von Bolzano-Weierstraß (genauer: Korollar 5.14) heran, so sieht man, daß man noch zu untersuchen hat, für welche Mengen $A \subseteq \mathbb{K}^d$ folgendes gilt: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{K}^d$ mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$. Dazu folgende Beobachtung.

Lemma 8.16 *Sei A eine beliebige Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d_x), und $a \in X$ fest. Es gibt genau dann eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in A$ mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ der Durchschnitt $A \cap U_\epsilon(a)$ nicht leer ist.*

Beweis. Existiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in A,$ mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dann gilt $d(a_n, a) < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit endlich vielen Ausnahmen, d.h. $a_n \in A \cap U_\epsilon(a)$ für alle diese n.

Sind umgekehrt die Durchschnitte $A \cap U_\epsilon(a) \neq \emptyset$ für alle $\epsilon > 0$, so wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Elemente $a_n \in A$ mit $d(a_n, a) < \frac{1}{n}$. Dann gilt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. $\diamond$

Satz 8.17 (Charakterisierung abgeschlossener Teilmengen) *Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d_x). Dann ist A abgeschlossen in X genau dann, wenn für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in A$ auch $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$ gilt.*

Beweis. Sei A abgeschlossen in X, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in A \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Wäre $a \in X\backslash A$, so gäbe es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(a) \subseteq X\backslash A$ (da $X\backslash A$ offen ist), also ist $U_\epsilon(a) \cap A = \emptyset$ im Widerspruch zur Tatsache, daß in $U_\epsilon(a)$ (sogar) unendlich viele $a_n \in A$ liegen müßten.

Für die umgekehrte Implikation bezeichne

$$\overline{A} := \{a \in X : \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N},\ a = \lim_{n\to\infty} a_n\}.$$

Offensichtlich gilt immer $A \subseteq \overline{A}$ (zu $a \in A$ setze $a_n = a \ \ \forall n \in \mathbb{N}$). Gilt die Voraussetzung aus dem Satz, so gilt $A = \overline{A}$. Wir zeigen, daß $X\backslash\overline{A}$ offen ist. Sei also $a \in X\backslash\overline{A}$, d.h. es gibt keine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Mit Lemma 8.16 gibt es $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(a) \subseteq X\backslash A = X\backslash\overline{A}$. $\diamond$

Bemerkung: Im Beweis von Satz 8.16 haben wir zu $A \subseteq (X, d_x)$

$$\overline{A} := \{a \in X : \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N},\ a = \lim_{n\to\infty} a_n\}$$

betrachtet. $\overline{A}$ heißt der **Abschluß von A** (oder abgeschlossene Hülle von A). Jeder Punkt $a \in \overline{A}$ heißt **Berührpunkt von A**. In $\mathbb{R}$ gilt beispielsweise $[a,b] = \overline{]a,b[}$ oder $[a,b] = \overline{[a,b[}$. Allgemein gilt $\overline{U_r(x)} = K_r(a)$.

Nun können wir alle kompakten Teilmengen K in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ charakterisieren.

Korollar 8.18 *Sei K eine Teilmenge im Euklidischen Raum $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_2)$. Dann sind äquivalent*

(i) K ist kompakt

(ii) K ist abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ gilt in jedem metrischen Raum.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Wir überlegen uns, daß $(K, \|\cdot\|_2)$ ein folgenkompakter metrischer Raum ist. (Mit Satz 8.14 folgt dann die Kompaktheit von K). Mit Korollar 5.14 hat jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in K$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Mit der Abgeschlossenheit von K liegt auch $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ in K. (Satz 8.17). $\diamond$

Insbesondere sind alle $K_r(a) \subseteq \mathbb{K}^d$ oder $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt.

Nun haben wir das gesamte Rüstzeug, uns wieder stetigen Funktionen zuzuwenden.

Definition 8.19 *Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt gleichmäßig stetig auf X, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon \qquad \textit{für alle } x, y \in X \quad \textit{mit } d(x,y) < \delta.$$

Man beachte die Unterschiede zwischen gleichmäßiger Stetigkeit und Stetigkeit. Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt Stetigkeit. Aber: Gleichmäßige Stetigkeit ist die Eigenschaft einer Funktion auf einer Menge, Stetigkeit kann für einen Punkt aus der Menge erklärt werden. Außerdem ist zu beachten, daß bei Stetigkeit in $p \in X$ das zu findende $\delta > 0$ von $\epsilon > 0$ und $p \in X$ abhängen kann. Bei gleichmäßiger Stetigkeit hängt $\delta > 0$ nur von $\epsilon > 0$ ab und die $\epsilon - \delta-$Bedingung gilt auf ganz X.

Beispiele:

(1) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig auf $[0,1]$
(denn $|f(x) - f(y)| \ = \ |x-y|\,|x+y| \ \leq 2|x-y|$)

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist **nicht** gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$
(denn $|f(x) - f(x+\delta)| \ = \ |\delta|\,|2x+\delta| \ \geq \epsilon$ falls $x \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt wird)

(3) $f :]0,1[\to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist **nicht** gleichmäßig stetig auf $]0,1[$.
(Übungsaufgabe)

Satz 8.20 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von einem metrischen Raum (X, d_x) in einen metrischen Raum (Y, d_y). Ist (X, d_x) kompakt, so ist $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig auf X.*

Beweis. Wir nehmen an, daß f nicht gleichmäßig stetig auf X ist. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und Punkte $x_n, y_n \in X$ mit $d_x(x_n, y_n) > \dfrac{1}{n}$ aber $d_y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Da (X, d_x) kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in X$ konvergiert (Satz 8.12). Mit $d_x(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$, gilt auch $y_{n_k} \to x$ mit $k \to \infty$. Mit der Stetigkeit von f folgt: $f(x_{n_k}) \to f(x)$ und $f(y_{n_k}) \to f(x)$ mit $k \to \infty$. Nun gilt aber (vgl. (H7) Vierecksungleichung für d_y):

$$\epsilon \leq \ | \ d_y(f(x_{n_k}, f(y_{n_k})) \ - \ \underbrace{d_y(f(x), f(x))}_{=0} |$$

$$\leq \ d_y(f(x_{n_k}), f(x)) \ + \ d_y(f(y_{n_k}), f(x)) \ \to 0 \qquad \text{mit } k \to \infty,$$

ein Widerspruch. $\diamond$

Wir werden Konsequenzen der Kompaktheit noch öfters begegnen.

9 Differentiation

Der Differentiation liegen einige Vorstellungen zugrunde:

- Konstruktion einer Tangente an den Graphen einer Funktion in einem vorgegebenen Punkt
- Lokale Approximation einer Funktion durch eine möglichst einfache Funktion, nämlich ein Polynom ersten Grades
- Bestimmung der Momentangeschwindigkeit eines Teilchens
- "Gegenspieler der Integration"

u.s.w. Trotz der vielen Gesichter haben wir einen einfachen Zugang mit der Grenzwertbildung (siehe Ende von Paragraph 7).

Definition 9.1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{K}$ heißt in x* **differenzierbar***, falls der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t \in I, t \neq x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

existiert, und bezeichnen diesen Grenzwert mit $f'(x)$ oder $\dfrac{df}{dt}(x)$. $f'(x)$ heißt **Ableitung** *(oder Differentialquotient) von f in x. Existiert $f'(x)$,so heißt f in x* **differenzierbar***. Ist f in jedem $x \in I$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar.*

Bemerkung:

(1) Bei dem Grenzwert $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \in I, t \neq x}} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ kann es sich um rechts- und linksseitige Grenzwerte handeln. Die Angabe $t \in I,\ t \neq x$ wird künftig nicht explizit formuliert. Man sollte aber im Kopf behalten, welche t für die Grenzwertbildung zugelassen sind.

(2) Wir hätten durchaus gleich die Ableitung von Funktionen $f : I \to X$, X ein normierter Raum, betrachten können, und zwar als Grenzwert in X. Wir verzichten darauf, bemerken aber, daß komplexwertige Funktionen zugelassen sind.

Satz 9.2 *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ im Punkt $x \in I$ differenzierbar. Dann ist f in x stetig.*

Beweis. Wir haben für $t \neq x,\ t \in I$ und $t \to x$

$$f(t) - f(x) \ = \ \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \ \to \ f'(x) \cdot 0 \ = 0$$

mit den Rechenregeln vom Ende von Paragraph 7. Also ist f in x stetig. $\diamond$

Die Umkehrung von Satz 9.2 gilt nicht.

Schreiben wir die Gleichung des Beweises noch etwas um, so hat man:
Bezeichnet $P(t) = f(x) + f'(x)\,(t-x)$ das Polynom 1. Grades mit $P(x) = f(x)$, so gilt

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - P(t)}{t-x} = 0$$

D.h.: Die lokale Approximation von $f(t)$ durch $P(t)$ ist "schneller" als mit der t gegen x strebt. Man nennt $P(t)$ auch lineare Approximation von f in x.

Bevor wir einige Ableitungen berechnen, zeigen wir grundlegende Rechenregeln.

Satz 9.3 *Seien $f : I \to \mathbb{K}$, $g : I \to \mathbb{K}$ im Punkt $x \in I$ differenzierbar, $c \in \mathbb{K}$. Dann sind cf, $f+g$, fg in x differenzierbar. Ist $g(x) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar. Es gelten dabei:*

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (cf)'(x) = cf'(x)$

(ii) $(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ *(Produktregel)*

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)\,f'(x) - g'(x)\,f(x)}{g^2(x)}$ *(Quotientenregel)*

Beweis.

(i) folgt direkt mit den Rechenregeln für Grenzwerte

(ii) Wir haben

$$f(t)\,g(t) - f(x)\,g(x) = f(t)\,(g(t) - g(x)) + g(x)\,(f(t) - f(x))$$

Division durch $t-x$ und Beachtung, daß $f(t) \to f(x)$ mit $t \to x$ wegen Satz 9.2, liefern: $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

(iii) Bezeichne $h = \frac{f}{g}$. Wir haben dann

$$\frac{h(t) - h(x)}{t-x} = \frac{1}{g(t)g(x)} \left[g(x)\,\frac{f(t) - f(x)}{t-x} - f(x)\,\frac{g(t) - g(x)}{t-x} \right],$$

wovon man sich durch einfaches Auflösen der eckigen Klammern überzeugen kann. Da $g(t) \to g(x)$ mit $t \to x$, erhalten wir

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Die Aussagen zur Differenzierbarkeit haben wir natürlich mit der Bestimmung der Formeln mitbewiesen. $\diamond$

Beispiel: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, \quad f(x) = cx, \; c \in \mathbb{K},$ so gilt $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{ct - cx}{t - x} = c.$ Mit vollständiger Induktion und der Produktregel erhalten wir sofort: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n \; (n \in \mathbb{N}),$ so gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.
(denn: Ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^{n+1} = xf(x),$ so folgt mit der Induktionsvoraussetzung und Satz 9.3 (ii):

$$h'(x) = 1 \cdot f(x) + xf'(x) = x^n + xnx^{n-1} = (n+1)\, x^n \;)$$

Damit sind auch alle Polynome differenzierbar, und alle rationalen Funktionen sind differenzierbar, außer an den Punkten, wo der Nenner gleich 0 ist. Die Ableitungen bestimmt man gemäß Satz 9.3.
Insbesondere gilt für $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x^n},$ daß die Ableitung $f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$ ist.
Also insgesamt

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Eine weitere Regel, die wir oft nutzen werden, enthält folgendes Resultat:

Satz 9.4 (Kettenregel) *Seien I und J zwei Intervalle in $\mathbb{R}$. Ist $f : I \to J$ in $x \in I$ und $g : J \to \mathbb{K}$ in $y = f(x) \in J$ differenzierbar, so ist die Komposition $g \circ f : I \to \mathbb{K}$ in x differenzierbar, und es gilt:*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Beweis. Geht man naheliegend vor, so stößt man schnell auf eine Schwierigkeit:

$$\frac{g \circ f(t) - g \circ f(x)}{t - x} = \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{f(t) - f(x)} \, \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Mit $t \to x$ würde man die Behauptung sofort erhalten, wenn man wüßte, daß $f(t) \neq f(x)$ ist für $t \neq x$. Man geht deshalb folgendermaßen vor: Definiere $G : J \to \mathbb{K}$

$$G(s) = \begin{cases} \dfrac{g(s) - g(y)}{s - y} & \text{für } s \neq y \\ g'(y) & \text{für } s = y \end{cases}$$

Dann ist G stetig in $s = y = f(x)$, und es gilt $g(s) - g(y) = (s - y)\, G(s)$. Man erhält damit (und da f stetig in x ist):

$$\lim_{t \to x} \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(f(t) - f(x))\, G(f(t))}{t - x}$$

$$= f'(x)\, G(f(x)) = f'(x)\, g'(f(x)).$$

$\diamond$

Nun wollen wir für einige weitere Beispiele die Ableitungen bestimmen:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, \;\; f(x) = \exp(cx) \quad (c \in \mathbb{K})$

Wir benutzen Z29. Damit erhalten wir

$$f'(x) \;=\; \lim_{t\to x} \frac{\exp(ct) - \exp(cx)}{t-x} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{\exp(c(x+h)) \; - \exp(cx)}{h}$$

$$= \; \exp(cx) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(ch) - 1}{h} \;=\; \exp(cx)\cdot c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp(ch)-1}{ch} \;=\; \exp(cx)c.$$

(2) Ist $f : I \to \mathbb{C}$ in $x \in I$ differenzierbar, so sind $\mathrm{Re}\, f : I \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}\, f : I \to \mathbb{R}$ in $x \in I$ differenzierbar, und es gilt

$$(\mathrm{Re}\, f)'(x) \;=\; \mathrm{Re}\, f'(x), \qquad (\mathrm{Im}\, f)'(x) \;=\; \mathrm{Im}\, f'(x)$$

(Dies folgt direkt aus $f = \mathrm{Re}\, f \; + i\, \mathrm{Im}\, f$).

Betrachte gemäß (1) $f(t) \; = \exp(it) \; = \cos t + i \sin t$. Dann haben wir

$$f'(t) \; = i \exp(it) \; = i(\cos t + i \sin t) \; = -\sin t + i \cos t.$$

Somit gilt

$$\cos'(t) \; = -\sin t, \qquad \sin'(t) \; = \cos t$$

(3) In H20 wurde gezeigt: Sind $0 < x < t$, so gilt

$$\frac{1}{t} \;\leq\; \frac{\ln(t) - \ln(x)}{t-x} \;\leq\; \frac{1}{x}.$$

Vertauscht man die Rollen von t und x, so gilt für $0 < t < x$

$$\frac{1}{x} \;\leq\; \frac{\ln(t) - \ln(x)}{t-x} \;\leq\; \frac{1}{t}$$

Mit $t \to x$ folgt $\ln'(x) \; = \dfrac{1}{x}$

(4) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \; = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für x=0} \end{cases}$ vgl. T35 b)

f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

Für $x \neq 0$ gilt mit Satz 9.3 und Satz 9.4:

$$f'(x) \; = \sin \frac{1}{x} \; - \; \frac{1}{x} \; \cos \frac{1}{x}$$

Für $x = 0$ sind beide Sätze nicht anwendbar. Mit Bezug zur Definition sieht man: $\dfrac{f(t) - f(0)}{t-0} \; = \sin \dfrac{1}{t}$. Damit existiert $f'(0)$ nicht, f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

(5) Die Funktion $f : [0, \infty[\to [0, \infty[\ ,\quad f(x) = x^2$ ist bijektiv und differenzierbar. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[\ ,\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ist im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar. Wäre f^{-1} in $x = 0$ differenzierbar, so würde mit der Kettenregel gelten:

$$1 \;=\; \left(f^{-1} \circ f\right)'(0) \;=\; \left(f^{-1}\right)'(f(0)) \cdot f'(0) \;=\; \left(f^{-1}\right)'(0) \cdot 2 \cdot 0 \;= 0$$

(Diese Überlegung gilt für jede bijektive differenzierbare Funktion f und belegt, daß für die Differenzierbarkeit von f^{-1} in $y = f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ ungleich Null sein muß.)

Satz 9.5 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in $x \in I$, $\;f'(x) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : J \to I,\ J := f(I)$ in $y = f(x)$ differenzierbar, und es gilt:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \;=\; \frac{1}{f'(x)}.$$

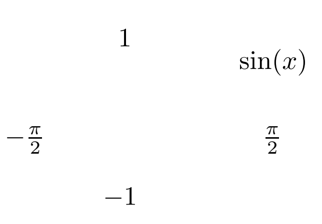
Beweis. Wir erinnern vorweg an Satz 7.10, der besagt, daß $f^{-1} : J \to I$ stetig auf ganz J ist.

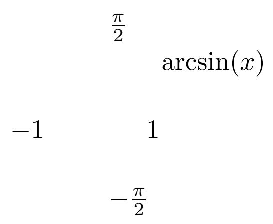
Für jede Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \to y = f(x),\ s_n \in J,\ s_n \neq y$ gilt: Bezeichnet $t_n = f^{-1}(s_n)$, so ist auch $t_n \neq x$ und $t_n \to x$ (da f^{-1} stetig ist). Folglich gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(s_n) - f^{-1}(y)}{s_n - y} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{t_n - x}{f(t_n) - f(x)} \;=\; \frac{1}{f'(x)}.$$

◇

Beispiel: $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],\quad f(x) = \sin x$ ist streng monoton wachsend und differenzierbar mit $f'(x) = \cos x$.
Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wird mit arcsin (Arcus-Sinus) bezeichnet.





arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist für alle $y \in\ ]-1, 1[$ differenzierbar, und es gilt mit $y = \sin x$:

$$\arcsin'(y) \;=\; \frac{1}{\cos(x)} \;=\; \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Als nächstem zentralen Thema der Differentiation wenden wir uns dem Mittelwertsatz zu.

Definition 9.6 *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine reell-wertige Funktion auf einem metrischen Raum X. Man sagt, daß f ein* **lokales Maximum** *(bzw. lokales Minimum) im Punkt $p \in X$ besitzt, wenn ein $r > 0$ existiert mit $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in U_r(p)$ (bzw. $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in U_r(p)$). Lokale Maxima oder Minima nennen wir lokale Extrema.*

Satz 9.7 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit einem lokalen Extremum in einem Punkt $x \in \,]a, b[\,$. Existiert $f'(x)$, so gilt dann $f'(x) = 0$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall eines lokalen Maximums. Sei $r > 0$ gemäß der Definition 9.6, so daß auch $a < x - r < x < x + r < b$ gilt. Für $x - r < t < x$ gilt $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0$. Mit $t \to x$ folgt $f'(x) \geq 0$.

Für $x < t < x + r$ gilt $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0$. Mit $t \to x$ gilt nun $f'(x) \leq 0$. Zusammengefaßt folgt $f'(x) = 0$. $\diamond$

Nun gibt es für stetige Funktionen eine einfache hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums.

Satz 9.8 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x \in \,]a, b[\,$, so daß f in x ein lokales Extremum annimmt.*

Beweis. Ist f konstant, so ist nichts zu zeigen. Sei also f eine nicht-konstante Funktion. Mit Korollar 8.9 gibt es $c, d \in [a, b]$ mit $f(c) = \max f([a, b])$, $f(d) = \min f([a, b])$. Da $f(a) = f(b)$ und f nicht-konstant, muß mindestens einer der beiden Punkte c oder d von a und b verschieden sein. D.h. $c \in \,]a, b[$ oder $d \in \,]a, b[\,$. $\diamond$

Faßt man nun die beiden vorangehenden Sätze zusammen, so folgt unmittelbar

Korollar 9.9 (Rolle)
(Michel Rolle, 1652-1719, Paris)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a, b[$ differenzierbar ist, und für die $f(a) = f(b)$ gilt. Dann gibt es ein $x \in \,]a, b[$ mit $f'(x) = 0$.

Nun können wir den wichtigen Mittelwertsatz einfach herleiten. Wir formulieren gleich eine leicht verallgemeinerte Version.

Satz 9.10 *Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf $]a, b[$ differenzierbar sind. Dann gibt es ein $x \in \,]a, b[$ mit*

$$(f(b) - f(a))\, g'(x) \;=\; (g(b) - g(a))\, f'(x)$$

(Man beachte: Die Differenzierbarkeit in den Randpunkten ist nicht erforderlich.)

Beweis. Definiere $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$$

Dann ist h stetig, auf $]a,b[$ differenzierbar, und

$$h(a) = f(b)\, g(a) - f(a)\, g(b) = h(b)$$

Mit Korollar 9.9 existiert ein $x \in\,]a,b[$ mit $h'(x) = 0$, woraus sofort die Behauptung folgt. ◇

Der Sonderfall, daß $g(x) = x$ ist, wird Mittelwertsatz (der Differentialrechnung) genannt:

Satz 9.11 (Mittelwertsatz) *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]a,b[$ differenzierbar ist, so gibt es ein $x \in\,]a,b[$ mit*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Eine "physikalische" Interpretation ist beispielsweise die folgende.
Läuft man 100 m in 10.0 sec, so ist die Durchschnittsgeschwindigkeit 36 km/h. Mit dem Mittelwertsatz (kurz: MWS) gibt es mindestens einen Zeitpunkt, an dem die Momentangeschwindigkeit 36 km/h ist. (Ähnliche Argumente kann man hinsichtlich Geschwindigkeitsüberschreitungen im Straßenverkehr anführen!)

Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir eine Reihe interessanter Ergebnisse zum Verhalten von differenzierbaren Funktionen.

Korollar 9.12 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gelten:*

(i) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in\,]a,b[$, so ist f monoton wachsend.

(ii) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in\,]a,b[$, so ist f konstant.

(iii) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in\,]a,b[$, so ist f monoton fallend.

Beweis. Für alle drei Aussagen ziehen wir die Gleichung

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1)$$

heran, die mit dem Mittelwertsatz für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ und geeignetem $x \in\,]x_1, x_2[$ gilt. Gilt nun $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in\,]a,b[$, so folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$, d.h. f wächst monoton. Entsprechend geht man für (ii) und (iii) vor. ◇

Bemerkung:

(1) Gilt sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in\,]a,b[$ (bzw. $f'(x) < 0$), so ist f sogar streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), wie sofort aus dem Nachweis von Korollar 9.12 folgt.

(2) Es gelten in Korollar 9.12 jeweils auch die umgekehrten Implikationen. Dies folgt ebenfalls mit der im Beweis angegebenen Gleichung.

(3) Mit Korollar 9.12 (ii) gilt auch: Seien $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in\ ]a,b[$. Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{K}$ mit $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in [a,b]$. Dazu betrachte $h(x) = f(x) - g(x)$ und spalte auf in Realteil und Imaginärteil falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und zitiere Korollar 9.12 (ii).

An dieser Stelle wollen wir eine wichtige Bezeichnung einführen.

Definition 9.13 *Sei $f : I \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{K}$ heißt* **Stammfunktion von f**, *falls $F' = f$ gilt. (Mit Bemerkung (3) ist F bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.)*

Wir setzen die Liste der Folgerungen aus dem Mittelwertsatz fort.

Korollar 9.14 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Es gelte mit einem $\lambda \in \mathbb{K}$ für alle $x \in\ ]a,b[$*

$$f'(x) \ = \ \lambda\, f(x).$$

Dann gilt $f(x) = c\ \exp(\lambda x)$ für alle $x \in [a,b]$, wobei $c \in \mathbb{K}$ eine Konstante ist.

Beweis. Setze $g(x) := f(x)\ \exp(-\lambda x)$. Es gilt

$$g'(x) \ = \ f'(x)\ \exp(-\lambda x) \ - \ \lambda f(x)\ \exp(-\lambda x) \ = 0$$

für alle $x \in [a,b]$. Somit gilt: $g = c$ eine konstante Funktion. Das heißt $f(x) = c\ \exp(\lambda x)$.
$\diamond$

Korollar 9.15 (Darboux) *(Jean Gaston Darboux, 1842-1917, Paris)*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a,b]$. Sei $c \in\ ]f'(a), f'(b)[$, falls $f'(a) < f'(b)$ (bzw. $c \in\ ]f'(b), f'(a)[$, falls $f'(b) < f'(a)$.) Dann existiert $x_0 \in\ ]a,b[$ mit $f'(x_0) = c$.

Beweis. Sei $f'(a) < c \ < f'(b)$. Setze $g(x) := f(x) - cx$. Dann gilt $g'(a) < 0$ und $g'(b) > 0$. Gemäß der Definition mit dem Differentialquotienten $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{g(t) - g(a)}{t - a}$ gibt es ein $t_1 \in\ ]a,b[$ mit $g(t_1) < g(a)$. Genauso folgt, daß ein $t_2 \in\ ]a,b[$ existiert mit $g(t_2) < g(b)$. Mit Korollar 8.9 nimmt g auf $[a,b]$ sein Minimum an, und wegen dem gerade Gezeigten nimmt g dieses Minimum in $]a,b[$ an. Sei $x_0 \in\ ]a,b[$ dieser Punkt. Mit Satz 9.7 gilt $g'(x_0) = 0$. Folglich gilt $f'(x_0) = c$. $\diamond$

Unter Verwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes können einige Grenzwerte recht einfach bestimmt werden. Wir leiten die sogenannte L'Hospitalsche Regel her (L'Hospital, Marquis de Sainte-Mesme, 1661-1704, Paris. Die L'Hospitalsche Regel stammt von Johann Bernoulli I).

Satz 9.16 *Seien* $f :]a,b[\to \mathbb{R}, \quad g :]a,b[\to \mathbb{R} \quad (-\infty \le a < b \le \infty)$ *zwei differenzierbare Funktionen. Sei* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in]a,b[$, *und es gelte* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0 \ = \lim\limits_{x\to b} g(x)$. *Dann ist* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in]a,b[$. *Existiert* $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \ = \lambda$ *(auch als uneigentlicher Grenzwert), so gilt*

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ = \ \lambda \ = \ \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(Eine entsprechende Aussage gilt für $x \to a$.*)*

Beweis. Sei zunächst $b \in \mathbb{R}$. Damit lassen sich f und g fortsetzen zu stetigen Funktionen durch $f(b) = 0 = g(b)$. Für $c \in]a,b[$ gibt es mit dem Mittelwertsatz ein $x \in]c,b[$ mit $g(c) = g(c) - g(b) \ = g'(x)\ (c-b)$. Mit den Voraussetzungen ist also auch $g(c) \neq 0$ für alle $c \in]a,b[$.

Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 9.10) existiert zu jedem $c \in]a,b[$ ein $x = x(c) \in]c,b[$ mit

$$\frac{f(c)}{g(c)} \ = \ \frac{f(c) - f(b)}{g(c) - g(b)} \ = \ \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Mit $c \to b$ gilt auch $x = x(c) \to b$, und die Behauptung folgt.

Nun betrachten wir den Fall $b = \infty$. Nach Verkleinerung des Definitionsbereiches können wir $a > 0$ annehmen. Wir setzen

$$\varphi :]0, \frac{1}{a}[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(\frac{1}{t}) \qquad \text{und} \qquad \psi :]0, \frac{1}{a}[\to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = g(\frac{1}{t}).$$

Die Ableitung von ψ ist $\psi'(t) \ = \ \dfrac{-g'(\frac{1}{t})}{t^2} \ \neq 0$ für alle $t \in]0, \frac{1}{a}[$ und es gilt $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0 \ = \lim\limits_{t\to 0} \psi(t)$. Damit sind die Voraussetzungen der vorherigen Überlegung erfüllt, wenn man sich dem linken Randpunkt nähert. Somit konvergiert

$$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} \ = \ \frac{x^2\ f'(\frac{1}{x})}{x^2\ g'(\frac{1}{x})} \ = \ \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} \qquad\qquad (x = x(c))$$

gegen λ, falls c gegen 0 strebt. λ ist aber auch der Grenzwert von $\dfrac{\varphi(c)}{\psi(c)}$ mit $c \to 0$. Damit gilt wie behauptet

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} \ = \ \lambda \ = \ \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{g(y)}.$$

◇

Beispiele:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \ = 1 \qquad$ (denn: $\sin(x) \to 0$, $x \to 0$ mit $x \to 0$
folglich: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \ = \ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} \ = 1$)

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = 0$

(denn: $x-\sin(x)\to 0$, $x\sin(x)\to 0$ mit $x\to 0$ und die Voraussetzung "$g'(x)\neq 0$" in $]0,b[$, b geeignet, ist erfüllt. Folglich

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\cos(x)+\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{-x\sin(x)\ +2\cos(x)} = 0$$

wobei in der zweiten Gleichung nochmals Satz 9.16 angewendet wurde, wobei die Voraussetzungen auch erfüllt sind.)

Eine zweite Regel von L'Hospital befaßt sich mit dem Fall, daß $\lim\limits_{t\to b} g(t) = \infty$ (oder $\lim\limits_{t\to b} g(t) = -\infty$).

Satz 9.17 *Seien $f :]a,b[\ \to \mathbb{R}$, $g :]a,b[\ \to \mathbb{R}$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ zwei differenzierbare Funktionen. Sei $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in\ ]a,b[$ und es gelte $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\infty$. Existiert $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (auch als uneigentlicher Grenzwert), so gilt*

$$\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda = \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

(Eine entsprechende Aussage gilt für $x\to a$.)

Beweis. Sei zuerst $\lambda\in\mathbb{R}$. Ferner sei $\epsilon>0$. Dann gibt es $s\in\ ]a,b[$ mit

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda\right| < \epsilon \quad \text{und } g(x)>0 \qquad \text{für alle } x\in [s,b[\ .$$

Nun wähle $t\in\ ]s,b[$, so daß $|g(x)| > |f(x)|/\epsilon$ und $|g(x)| > |g(s)|/\epsilon$ für alle $x\in [t,b[$.

Betrachte $x\in\ ]t,b[$. Mit Satz 9.10 gilt für ein $\xi\in\ ]s,x[$

$$g'(\xi)\ (f(x)-f(s)) = f'(\xi)\ (g(x)-g(s))$$

Dies können wir umformen zu:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(s)}{g(x)}\right) + \frac{f(s)}{g(x)}.$$

Man erhält daraus

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| \leq \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,\frac{g(s)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(s)}{g(x)}\right| < \epsilon + (|\lambda| + \epsilon)\,\epsilon + \epsilon$$

Damit gilt

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Nun sei $\lambda = \infty$. Sei $M > 0$ vorgegeben. Dann gibt es $s \in \,]a, b[$ mit $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \geq M$ und $g(x) > 0$ für alle $x \in [s, b[$.

Nun wähle $t \in \,]s, b[$ mit $g(x) > -f(s)$, $g(x) > 2g(s)$ für alle $x \in [t, b[$. Betrachte $x \in \,]t, b[$. Mit Satz 9.10 erhält man wiederum mit $\xi \in \,]s, x[$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \left(1 - \frac{g(s)}{g(x)}\right) + \frac{f(s)}{g(x)} > \frac{1}{2} M - 1$$

Damit folgt (da $M > 0$ beliebig) $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$. ◇

Beispiele:

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = 0$

(denn $\dfrac{1}{x} \to \infty$ mit $x \to 0$. Folglich $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$)

(2) Folgendes "Beispiel" soll zeigen, daß man bei den L'Hospitalschen Regeln die Voraussetzungen zu beachten hat, auch $g'(x) \neq 0$! (Das Beispiel stammt von O.Stolz, 1842-1905, Innsbruck)

Sei $f(x) = x + \sin(x) \cos(x)$, $g(x) = f(x) \exp(\sin(x))$
Man sieht sofort

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \exp(\sin(x)) \qquad \text{existiert nicht}$$

(oszillierendes Verhalten zwischen $\dfrac{1}{e}$ und e).

Hingegen gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 \cos^2(x)}{\cos(x) \exp(\sin(x)) [2\cos(x) + f(x)]}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 \cos(x)}{f(x) + 2\cos(x)} \exp(-\sin(x)) = 0$$

(denn $f(x) \to \infty$ mit $x \to \infty$).

Von den Voraussetzungen ist erfüllt $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, aber $g'(x) \neq 0$ ist nicht möglich (auch nicht nach eventueller Einschränkung des Definitionsbereichs):

$$g'(x) = \cos(x) \exp(\sin(x)) [2\cos(x) + f(x)] = 0 \qquad \text{für alle } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$