p-harmonische Funktionen: Beschränktheit des Gradienten

Toni Scharle

LMU München

Zillertal / 07.01.2015 – 10.01.2015

Lokal p-harmonische Funktionen

Sei $p > 1$. Eine $C^2(\Omega)$-Funktion ist eine klassische p-harmonische Funktion, wenn gilt

$$\Delta_p u = \nabla \cdot \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = 0$$

Wir überführen dies in die schwache, lokale Formulierung, sodass wir eine $W^{1,p}_{lok}$ Funktion u lokal schwach p-harmonisch nennen, wenn für alle $\varphi \in W^{1,p}_{lok}$ und alle Kompakta $K \subset \Omega$ gilt: gilt:

$$\int_K |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi = 0$$

Bemerkung: Für $p = 2$ ergibt sich der gewöhnliche Laplace-Operator aus dem p-Laplace-Operator. Der Exponent $p - 2$ wurde so gewählt, dass das zu minimierende Funktional für eine Lösung $\int |\nabla u|^p$ ist.

Lemma zur Schnellen geometrischen Konvergenz

Lemma

Es seien $\alpha > 0, c > 0$ *und* $b > 1$. *Für eine Folge* a_k *mit*

$$a_{k+1} \leq Cb^k a_k^{1+\alpha}$$

$$a_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} b^{-\frac{1}{\alpha^2}}$$

Dann gilt $a_k \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} b^{-\frac{1+k\alpha}{\alpha^2}} \to 0$

Beweis direkt per Induktion.

Bemerkung: Haben wir $a_{k+1} \leq Cb^k a_k \left(\frac{a_k}{\gamma}\right)^\alpha$ mit frei wählbarem γ, so gilt $a_k \to 0$ für $\gamma \geq a_0 C^{\frac{1}{\alpha}} b^{\frac{1}{\alpha^2}}$

Energieungleichung

Theorem

Es sei $u \in W^{1,p}_{lok}(\Omega)$ *mit* $\Delta_p u = 0$ *im lokal schwachen Sinn,* $f \geq 0$ *eine nicht fallende Funktion und* $\zeta \in C_0^\infty(Q)$*. Bezeichne weiterhin* $v := |\nabla u|$*. Dann gilt*

$$\fint_Q v^{p-2} f(v) |\nabla v|^2 \zeta^2 \lesssim \fint_Q v^p f(v) |\nabla \zeta|^2$$

Bermerkung:
∇v muss a priori nicht als Funktion existieren. Der völlig rigorose Beweis des Theorems erfordert die Arbeit mit unhandlichen diskreten Ableitungen.

Beweis(skizze) des Theorems

Wir betrachten

$$
\begin{aligned}
I &:= \fint_Q \partial_l \left(v^{p-2}\partial_j u\right) \partial_j \left(f(v)\partial_l u\right) \zeta^2 \\
&= \fint_Q \partial_l \left(v^{p-2}\partial_j u\right) \partial_j \left(f(v)\partial_l u \zeta^2\right) - \partial_l \left(v^{p-2}\partial_j u\right) f(v)\partial_l u 2\zeta\partial_j\zeta \\
&= -\fint_Q v^{p-2}\partial_j u \partial_j \partial_l \left(f(v)\partial_l u \zeta^2\right) - \partial_l \left(v^{p-2}\partial_j u\right) f(v)\partial_l u 2\zeta\partial_j\zeta =: II
\end{aligned}
$$

Linke Seite:

$$
\begin{aligned}
I = & \fint_Q \big(f(v)v^{p-2}|\nabla^2 u|^2 + \left(f'(v)v^{p-2} + (p-2)v^{p-3}f(v)\right) v|\nabla v|^2 \\
& + f'(v)(p-2)v^{p-3}|\nabla v \cdot \nabla u|^2\big)\zeta^2 \\
= & \fint_Q \Big(f(v)v^{p-2}\left(|\nabla^2 u|^2 - |\nabla v|^2\right) + f'(v)v^{p-1}\left(|\nabla v|^2 - \frac{|\nabla v \cdot \nabla u|^2}{v^2}\right) \\
& + (p-1)v^{p-2}f(v)|\nabla v|^2 + (p-1)v^{p-3}f'(v)|\nabla v \cdot \nabla u|^2\Big)\zeta^2 \\
\geq & \fint_Q (p-1)v^{p-2}f(v)|\nabla v|^2\zeta^2
\end{aligned}
$$

Und auf der rechten Seite:

$$
\begin{aligned}
II = & -\fint_Q (p-2)v^{p-3}f(v)\partial_j v\partial_j u\partial_l u\partial_l \zeta 2\zeta + v^{p-2}f(v)\partial_l\partial_j u\partial_l u\partial_j\zeta 2\zeta \\
\leq & C\fint_Q v^{p-2}f(v)v|\nabla v|\zeta|\nabla\zeta| \\
\leq & C\delta\fint_Q v^{p-2}f(v)|\nabla v|^2\zeta^2 + Cc_\delta\fint_Q v^p f(v)|\nabla\zeta|^2
\end{aligned}
$$

Wir wählen nun δ klein genug und bringen den ersten Term auf die anderes Seite und das Theorem ist bewiesen. Obwohl wir hier Ableitungen von f im Beweis genutzt haben, muss f nicht differenzierbar sein. (Zunächst f glätten und am Ende Grenzprozess)

Corollary

Voraussetzungen an v wie oben und $\gamma \geq 0$*und wir definieren* $G(t) := C(t^{\frac{p}{2}} - \gamma^{\frac{p}{2}})_+$*, dann gilt:*

$$\fint_Q |\nabla(G(v)\zeta)|^2 \leq C \fint_Q v^p \chi_{v>\gamma} |\nabla\zeta|^2$$

Beweis: Mit $f(v) = \chi_{v>\gamma}$ gilt

$$\fint_Q |\nabla(G(v)\zeta)|^2 \sim \fint_Q v^{p-2}\chi_{v>\gamma}|\nabla v|^2\zeta^2 + \fint_Q (v^{\frac{p}{2}} - \gamma^{\frac{p}{2}})_+^2 |\nabla\zeta|^2$$

$$\lesssim \fint_Q v^p \chi_{v>\gamma} |\nabla\zeta|^2$$

Die Beschränktheit des Gradienten von u

Theorem

Es sei $u \in W^{1,p}_{lok}(\Omega)$ lokal schwach p-harmonisch auf einer offenen Menge Ω. Dann gilt für $v = |\nabla u|$ und einen Ball B mit $2B \subset \Omega$:

$$\sup_B v^p \lesssim \fint_{2B} v^p$$

Bemerkung: Wenn der Satz für Bälle gezeigt ist, kann er einfach auf andere beschränkte Mengen M mit $\overline{M} \subset \Omega$ verallgemeinert werden.

Beweis des Theorems

Wir definieren die Folge γ_k, sodass $\gamma_k^{\frac{p}{2}} = c_k = c_\infty(1 - 2^{-k})$, die Bälle $B_k = B(1 + 2^{-k})$ und Cutofffunktionen ζ_k mit $\chi_{B_k} \le \zeta_k \le \chi_{B_{k-1}}$ und $|\nabla \zeta_k| \lesssim 2^k$, sowie $G_k(t)$ wie oben und betrachten die Folge

$$W_k = \fint_{2B} v^p \chi_{v > \gamma_k} \zeta_k^2$$

Ziel: Mit dem am Anfang bewiesenem Lemma zeigen, dass für $\gamma_\infty^p \sim W_0$ $W_k \to 0$ gilt. Denn dann haben wir auf B $\chi_{v > \gamma_\infty} = 0$ und damit

$$v^p \le \gamma_\infty^p \lesssim \fint_{2B} v^p$$

Es gilt mit $v > \gamma_{k+1}$:

$$\begin{aligned} v^{\frac{p}{2}} &= v^{\frac{p}{2}} - c_k + c_k \\ &= v^{\frac{p}{2}} - c_k + \frac{c_k}{c_{k+1} - c_k}\left(c_{k+1} - c_k\right) \\ &< v^{\frac{p}{2}} - c_k + \frac{c_k}{c_{k+1} - c_k}\left(v^{\frac{p}{2}} - c_k\right) \\ &= \frac{c_{k+1}}{c_{k+1} - c_k}\left(v^{\frac{p}{2}} - c_k\right) \\ &\leq 2^{k+1} G_k(v) \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir die Abschätzung

$$W_k = \fint_{2B} v^p \chi_{v>\gamma_k} \zeta_k^2 \geq \fint_{2B} v^p \chi_{v>\gamma_{k+1}} \zeta_k^2 > \gamma_{k+1} \fint_{2B} \chi_{v>\gamma_{k+1}} \chi_{supp(\zeta_{k+1})}$$

Wir schätzen ab:

$$
\begin{aligned}
W_{k+1} &= ||v^p \chi_{v>\gamma_{k+1}} \zeta_{k+1}^2||_1 \leq ||v^p \chi_{v>\gamma_{k+1}} \zeta_{k+1}^2||_{\frac{n}{n-2}} ||\chi_{v>\gamma_{k+1}} \chi_{supp(\zeta_{k+1})}||_{\frac{n}{2}} \\
&= ||v^{\frac{p}{2}} \chi_{v>\gamma_{k+1}} \zeta_{k+1}||_{\frac{2n}{n-2}}^2 ||\chi_{v>\gamma_{k+1}} \chi_{supp(\zeta_{k+1})}||_1^{\frac{2}{n}} \\
&\leq 2^{2k+2} ||G_k(v)\zeta_{k+1}||_{\frac{2n}{n-2}}^2 \left(\frac{W_k}{\gamma_{k+1}^p} \right)^{\frac{2}{n}} \\
&\lesssim 2^{2k} ||\nabla \left(G_k(v)\zeta_{k+1} \right)||_2^2 \left(\frac{W_k}{\gamma_\infty^p} \right)^{\frac{2}{n}} \\
&\lesssim 2^{2k} ||v^p \chi_{v>\gamma_k} |\nabla \zeta_{k+1}|^2||_1 \left(\frac{W_k}{\gamma_\infty^p} \right)^{\frac{2}{n}} \\
&\lesssim 2^{4k} W_k \left(\frac{W_k}{\gamma_\infty^p} \right)^{\frac{2}{n}}
\end{aligned}
$$

Ausblick

Mit der hier vorgestellten Methode lässt sich die Beschränktheit von Gradienten auch für Lösungen von allgemeineren Problemen zeigen:

- Die parabolische (statt wie bisher elliptische) Version

$$\Delta_p u = \partial_t u$$

- Der φ-Laplace-Operator, mit einer geeigneten N-Funktion φ:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\varphi'(v)}{v} \nabla u \right) = 0$$

Mit dem Wissen um die Beschränktheit des Gradienten der Lösung lässt sich weiterhin sogar die lokale Hölder-Stetigkeit desselben zeigen.