Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen

Michael Holzer

LMU München

Hüttenseminar von 07.01.2015 - 10.01.2015

Hilfslemma

Für den Vortrag: $G \subset\subset \mathbb{R}^n$ (beschränktes Gebiet).
Für $u, \varphi \in \mathring{H}^1(G)$ definiere:

$$(-\Delta u)(\varphi) := \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

Dann gilt: $$\begin{aligned} -\Delta : \mathring{H}^1(G) &\to H^{-1}(G) \\ u &\to (-\Delta u)(\cdot) \end{aligned}$$

Beweis: Sei $u, \varphi \in \mathring{H}^1(G)$, dann:

$$|(-\Delta u)(\varphi)| \leq \int_G |\nabla u||\nabla \varphi| \leq \|\nabla u\|_{L^2(G)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(G)} \overset{Def}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2(G)} \|\varphi\|_{H^1(G)}$$

$$\|-\Delta u\|_{H^{-1}(G)} \overset{Def}{=} \sup_{\varphi \in \mathring{H}^1(G) \setminus \{0\}} \frac{|(-\Delta u)(\varphi)|}{\|\varphi\|_{H^1(G)}} \leq \|u\|_{H^1(G)}$$

$\Rightarrow$ **Beschränktheit** $\xRightarrow{\text{Linearität von Gradient, Skalarprodukt und Integral}}$ **Linearität**
$\Rightarrow$ Stetigkeit und $-\Delta u \in H^{-1}(G)$ $(\forall u \in \mathring{H}^1(G))$ $\square$

Definition schwacher Lösungen der Poissongleichung

Seien $f \in H^{-1}(G),\ g \in H^1(G)$. $u \in H^1(G)$ heißt **schwache Lösung des Randwertproblems** (RWP):

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } G \\ u &= g \text{ auf } \partial G \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varphi \in \mathring{H}^1(G): \quad \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi) \text{ und } u - g \in \mathring{H}^1(G)$$

Vereinfachung: Fall $g = 0$

Satz 1: (Existenz und Eindeutigkeit für $g = 0$)
$\forall f \in H^{-1}(G)\ \exists!\ u \in \mathring{H}^1(G)$:

$$(-\Delta u)(\varphi) = \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi)$$

$\forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)$ i.e.: u schwache Lösung von (RWP) für $g = 0$.

Es gilt: (a priori Abschätzung für c unabhängig von u)

$$\|u\|_{H^1(G)} \leq c\|f\|_{H^{-1}(G)}$$

Beweis (Existenz I: Übersicht)

$\overset{Poincaré}{\Longrightarrow} \bigstar : \ \forall v \in \mathring{H}^1(G) \ \exists c_1, c_2$ Konstanten bzgl. v:

$$c_1 \|v\|_{H^1(G)} \leq c_2 \|\nabla v\|_{L^2(G)} \leq c_2 \|v\|_{H^1(G)}$$

Betrachte: $\forall v \in \mathring{H}^1(G)$

$$I(v) := \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 \ - f(v)$$

$$\mathrm{I}_{\min} := \inf_{v \in \mathring{H}^1(G)} I(v)$$

Ziel : Zeige:

* $\mathrm{I}_{\min}$ ist beschränkt
* $I(v_m) \xrightarrow{m \to \infty} \mathrm{I}_{\min} \Rightarrow v_m$ Cauchyfolge
* $\exists u \in \mathring{H}^1(G) : I(u) = \mathrm{I}_{\min}$
* Minimierer von I ist Lösung des Problems $(-\Delta u) = f$

Beweis (Existenz II: Beschränktheit)

- Abschätzung nach oben: $0 \in \mathring{H}^1(G)$ mit $\mathrm{I}_{\text{min}} \leq I(0) < \infty$ ($\checkmark$)
- Abschätzung nach unten:

$$I(v) \geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - \sup_{v \in \mathring{H}^1(G)\setminus\{0\}} |f(v)| = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - \|f\|_{H^{-1}(G)}\|v\|_{H^1(G)}$$

$$\overset{\text{Poincaré}}{\geq} \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - \|f\|_{H^{-1}(G)} \cdot (c^2\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(G)})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - 2(\underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{1+c^2}\|f\|_{H^{-1}(G)}}_{a} \cdot \underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{2}}\|\nabla v\|_{L^2(G)}}_{b})$$

$$\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)} - \underbrace{\frac{1}{2}(1+c^2)\|f\|^2_{H^{-1}(G)}}_{a^2} - \underbrace{\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(G)}}_{b^2}$$

$$= -\frac{1+c^2}{2}\|f\|^2_{H^{-1}(G)} > -\infty \ (\checkmark) \Rightarrow \ \textbf{Beschränktheit}$$

Beweis (Existenz III: ∃Minimierer (a))

Definition als Infimum→ $\exists (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, Minimalfolge
$v_m \in \mathring{H}^1(G)\ (\forall m):\ I(v_m) \xrightarrow{m\to\infty} \mathrm{I}_{\min}$
Zeige: $\Rightarrow\ (v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge in $\mathring{H}^1(G)$

$$\int_G |\nabla(v_k - v_l)|^2 = \int_G |\nabla(v_k - v_l)|^2 + \int_G |\nabla(v_k + v_l)|^2 - \int_G |\nabla(v_k + v_l)|^2$$

$$= 2\int_G |\nabla v_k|^2 + 2\int_G |\nabla v_l|^2 - 4\int_G |\nabla(\tfrac{v_k+v_l}{2})|^2$$

$$= 4I(v_k) + 4f(v_k) + 4I(v_l) + 4f(v_l) - 8I(\tfrac{v_k+v_l}{2}) - 8f(\tfrac{v_k+v_l}{2})$$

$$\overset{f\in H^{-1}(G)}{=} 4(I(v_k) + I(v_l) - 2I(\tfrac{v_k+v_l}{2}))$$

Beweis (Existenz IV: ∃Minimierer (b))

$\frac{v_k+v_l}{2} \in \mathring{H}^1(G) \Rightarrow I(\frac{v_k+v_l}{2}) \geq \mathrm{I}_{\min}$:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(v_k - v_l)\|^2_{L^2(G)} = \int_G |\nabla(v_k - v_l)|^2 &= 4(I(v_k) + I(v_l) - 2I(\tfrac{v_k+v_l}{2}) \\
&\leq 4(I(v_k) + I(v_l) - 2\mathrm{I}_{\min}) \xrightarrow{k,l\to\infty} 0 \\
0 \leq \|v_k - v_l\|^2_{L^2(G)} &\overset{Poncaré}{\leq} c^2\|\nabla(v_k - v_l)\|^2_{L^2(G)} \\
&\Rightarrow \|v_k - v_l\|_{H^1(G)} \xrightarrow{k,l\to\infty} 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge Folge in $\mathring{H}^1(G)$
$\mathring{H}^1(G)$ vollständig $\to$ Konvergenz mit Grenzwert $u \in \mathring{H}^1(G)$

Beweis (Existenz V: Minimierer löst Problem)

Betrachte für $\varphi \in \mathring{H}^1(G)$ beliebig:

$$\frac{\partial}{\partial t} I(u+t\varphi)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_G \underbrace{|\nabla(u+t\varphi)|^2}_{|\nabla u|^2+2t\nabla u\cdot\nabla\varphi+t^2|\nabla\varphi|^2} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{f(u+t\varphi)}_{f(u)+tf(\varphi)}\Big|_{t=0}$$

$$= \int_G \nabla u\cdot\nabla\varphi + t\int_G |\nabla\varphi|^2 - f(\varphi)\Big|_{t=0}$$

$$= \int_G \nabla u\cdot\nabla\varphi - f(\varphi) \overset{u \text{ Minimierer}}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \int_G \nabla u\cdot\nabla\varphi = f(\varphi)$$

(Existenz✓)

Beweis (Eindeutigkeit)

Seien $u_1,\ u_2 \in \mathring{H}^1(G)$ Lösungen des Problems,
definiere $u := u_1 - u_2$ dann $\forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)$:

$$\begin{aligned}\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi &= \int_G \nabla u_1 \cdot \nabla \varphi - \int_G \nabla u_2 \cdot \nabla \varphi \\ &= f(\varphi) - f(\varphi) = 0\end{aligned}$$

Setze $\varphi = u \ \rightarrow \|\nabla u\|_{L^2(G)} = 0 \overset{\bigstar}{\rightarrow} \|u\|_{H^1(G)} = 0 \ \rightarrow u \equiv 0 \ \rightarrow u_1 = u_2$

(Eindeutigkeit✓)

Beweis (a priori Abschätzung)

Annahme: u löse das Problem. Betrachte $\varphi := u$, oBdA $u \neq 0$ (sonst Abschätzung klar)

$$\|u\|_{H^1(G)}^2 \overset{\bigstar}{\leq} c\|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 \overset{u \text{ Lösung}}{=} c \cdot f(u)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\|u\|_{H^1(G)} \leq \frac{c \cdot f(u)}{\|u\|_{H^1(G)}} \leq c \cdot \sup_{v \in \mathring{H}^1(G) \setminus \{0\}} \frac{|f(v)|}{\|v\|_{H^1(G)}} = c\|f\|_{H^{-1}(G)}$$

(A priori Abschätzung✓)

$\square$

Folgerung für $g \in \mathring{H}^1(G)$

Satz 2: (allgemeiner Fall)
Seien $g \in \mathring{H}^1(G),\ f \in H^{-1}(G)$ dann:
$\exists! u \in \mathring{H}^1(G)$: u schwache Lösung des Randwertproblems gemäß Definition. Es gilt für eine Konstante C:

$$\|u\|_{H^1(G)} \leq C(\|f\|_{H^{-1}(G)} + \|g\|_{H^1(G)})$$

Beweis:

Betrachte: $\tilde{u} := u - g, \quad \tilde{f}(\varphi) := f(\varphi) - \int\limits_G \nabla g \cdot \nabla \varphi$

$\to \tilde{f} \in H^{-1}(G)$ wegen $f, (-\Delta g) \in H^{-1}(G)$ (nach Lemma)

$\xrightarrow{Satz\ 1} \exists! \tilde{u} \in \mathring{H}^1(G) \; : \int\limits_G \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi = \tilde{f}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G)$

$\to u = \tilde{u} + g$ löst $-\Delta u = f$

Für ein $\tilde{C}$ (unabhängig von $u, \tilde{u}$):

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(G)} &\leq \|\tilde{u}\|_{H^1(G)} + \|g\|_{H^1(G)} \overset{Satz\ 1}{\leq} \tilde{C}\|\tilde{f}\|_{H^{-1}(G)} + \|g\|_{H^1(G)} \\
&\leq \tilde{C}(\|f\|_{H^{-1}(G)} + \underbrace{\|-\Delta g\|_{H^{-1}(G)}}_{\leq \|g\|_{H^1(G)} \text{ (Lemma)}}) + \|g\|_{H^1(G)} \\
&\leq C(\|f\|_{H^{-1}(G)} + \|g\|_{H^1(G)})
\end{aligned}$$

$\square$

Zusammenfassung

Satz 3:

$$-\Delta : \overset{\circ}{H}{}^1(G) \to H^{-1}(G)$$

- linear, bijektiv und stetig
- für k bzgl. u unabhängig: $k\|u\|_{H^1(G)} \leq \|-\Delta u\|_{H^{-1}(G)} \leq \|u\|_{H^1(G)}$

Beweis:

$*$ Linearität (Linearität von Gradient, Skalarprodukt, Integral)
$*$ Bijektivität (Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen)
$*$ Abschätzung nach oben: $\|-\Delta u\|_{H^{-1}(G)} \overset{Lemma}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2(G)} \overset{Def}{\leq} \|u\|_{H^1(G)}$
$*$ Abschätzung nach unten:

$$\|-\Delta u\|_{H^{-1}(G)} \overset{Def}{\geq} \frac{(-\Delta u)(u)}{\|u\|_{H^1(G)}} = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(G)}}{\|u\|_{H^1(G)}} \overset{\bigstar}{\geq} \frac{k\|u\|^2_{H^1(G)}}{\|u\|_{H^1(G)}} = k\|u\|_{H^1(G)}$$

$*$ Stetigkeit (Beschränktheit und Linearität) $\square$