
Maß- und Integralrechnung
Tutoriumsblatt 8

Aufgabe 1:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein streng monotoner Diffeomorphismus und $g \in \mathcal{L}^1$. Überzeugen Sie sich davon, dass die aus Analysis 2 bekannte Substitutionsregel und der Transformationssatz für Lebesgue-Integrale angewandt auf

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx$$

bzw.

$$\int_{f([a,b])} g(x) dx$$

für streng monoton steigendes f dass gleiche Ergebnis liefern, für streng monoton fallendes f jedoch genau vorzeichenvertauschte Ergebnisse liefern.

Aufgabe 2:

Die Transformation von Kreiskoordinaten in kartesische Koordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi :]0, \infty[\times]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \Phi(r, \varphi) &:= \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Fläche des des Kreissektors $S := \Phi(]0, R] \times [0, \frac{\pi}{4}])$.

Aufgabe 3:

Die Transformation von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi :]0, \infty[\times [0, \pi] \times [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \Phi(r, \theta, \varphi) &:= \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie das Volumen der Kugel $S := \Phi(]0, R] \times [0, \pi] \times [-\pi, \pi])$.