
Maß- und Integralrechnung
Tutoriumsblatt 7

Aufgabe 1:

Sei $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Zeigen Sie:

(a) Für $x, y > 0$ gilt

$$f(x, y) = \partial_x \partial_y \left(\arctan \frac{x}{y} \right).$$

(b) Es gilt (im Lebesgue-Sinne)

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Es gilt (im Lebesgue-Sinne)

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

(d) Es gilt

$$f \notin \mathcal{L}^1([0, 1]^2).$$

Aufgabe 2:

Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ und $|f|^2, |g|^2 \in \mathcal{L}^1(B)$. Zeigen Sie, dass $fg \in \mathcal{L}^1$ und

$$\int_B |fg| dx \leq \left(\int_B |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Berechnen Sie hierzu das Doppelintegral $\iint (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dx dy$.