Prof. Dr. Lars Diening
Roland Tomasi
Giovanni Placini 13.10.2014

Maß- und Integralrechnung

Tutoriumsblatt 1

Aufgabe 1:
Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ genau dann eine Algebra ist, wenn

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(b) Aus $A \in \mathcal{A}$ folgt $A^{\complement} \in \mathcal{A}$.

(c) Aus $A, B \in \mathcal{A}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 2:
Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen und A eine Menge. Zeigen Sie, dass $A_n \to A$ genau dann, wenn $\chi_{A_n}(x) \to \chi_A(x)$.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass sich jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ als abzählbare Vereinigung offener Intervalle mit rationalen Eckpunkten darstellen lässt, d.h.

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\,, \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q}^n.$$

Bemerkung: Hieraus folgt insbesondere $\sigma(\{U : U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}\}) = \sigma(\{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}^n\})$.