Schwache Konvergenz

Thomas Reitsam

LMU München

Zillertal am 13.12.2013

Wiederholung

- $\ell^2 := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$
- $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \qquad \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$
- ℓ^2 ist ein Hilbertraum
- $\|f\| := \sup_{x\in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

$X^* := BL(X, \mathbb{R}) = \{f \mid f : X \to \mathbb{R}, \text{ linear, beschränkt/stetig}\}$ heißt Dualraum von X.

Rieszscher Darstellungssatz

Sei X ein Hilbertraum und $f \in X^*$. Dann existiert genau ein $y_f \in X$, so dass gilt:

(i) $f(x) = \langle y_f, x \rangle \qquad \forall x \in X$

(ii) $\|f\| = \|y_f\|$

Beweisskizze: Sei $f \in BL(X, \mathbb{R})$ und $f \neq 0$ (sonst wähle $y_f = 0$). Dann gilt: $ker(f) \subsetneq X \;\Rightarrow\; (ker(f))^\perp \supsetneq \{0\}$, wähle $x_0 \in (ker(f))^\perp$ beliebig.

$$y_f := \frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0 \Rightarrow f(x) = \langle y_f, x \rangle \qquad \forall x \in span(ker(f), x_0)$$

$$X = span(ker(f), x_0), \text{ denn: } x = \underbrace{x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0}_{\in\ ker(f)} + \underbrace{\frac{f(x)}{f(x_0)} x_0}_{\in\ span(x_0)}$$

Schwache Konvergenz

Definition: Eine Folge $(x_n)_n \subset X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$ genau dann, wenn
$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \qquad \forall f \in X^* \qquad$ Notation: $x_n \xrightarrow{w} x$

Sei X ein Hilbertraum, dann gilt nach dem Rieszschen Darstellungsatz für $(x_n)_n \subset X$ und $x \in X$:

$$x_n \xrightarrow{w} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle y, x_n \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle y, x \rangle \qquad \forall y \in X$$

Der schwache Grenzwert ist eindeutig.

Schwacher Grenzwert

Beweis (für X Hilbertraum): Sei $(x_n)_n \subset X$ und $x, y \in X$

Annahme: $x_n \xrightarrow{w} x \qquad \textit{und} \qquad x_n \xrightarrow{w} y$

$$\lim_{n\to\infty} \langle z, x_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, x_n \rangle \qquad z \in X$$

$$\Leftrightarrow \qquad \langle z, x \rangle = \langle z, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \qquad \langle z, x - y \rangle = 0$$

Wähle $z = x - y \in X \Rightarrow \langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 = 0$

$\Rightarrow x = y$

Beispiel

Sei $x^k = (x^k_n)_n := (\delta_{k,n})_n \qquad (x^k)_k \in \ell_2$, denn $\|x^k\| = 1 < \infty \;\; \forall k \in \mathbb{N}$

x^k ist beschränkt, aber konvergiert nicht in Norm und besitzt keine konvergente Teilfolge

aber $x^k \xrightarrow{w} 0$, denn:

$$\lim_{k\to\infty} \langle y, x^k \rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \delta_{k,n} = \lim_{k\to\infty} y_k = 0 \qquad \forall y \in \ell_2$$

Separabilität

Definition: X heißt separabel, falls er eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.

$\exists A \subset X$ abzählbar und $\overline{A} = X$

$\Rightarrow \forall x \in X \ \exists (a^k)_k \subset A \qquad \text{s.d.} \qquad a^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$

$A := \{x \in \ell_2 \mid \exists N \in \mathbb{N} \ s.d. \ x_n = 0 \ \forall n \geq N\}$

$A \subsetneq \ell_2, \ A$ ist abzählbar und $\overline{A} = \ell_2$

$\Rightarrow \ell_2$ ist separabel

Beweis

Sei $x \in \ell_2$ und $(a^k)_k \subset A$

$$\|x - a^k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - a_n^k|^2 = \sum_{n=k}^{\infty} |x_n|^2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \quad \sum_{n=k}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon \qquad \forall k \geq N,$$

da $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$

$$\Rightarrow a^k \xrightarrow{k \to \infty} x \quad \Rightarrow \overline{A} = \ell_2$$

Banach-Alaoglu

Definition: $M \subset X$ heißt schwach folgenkompakt, falls jede Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M hat.

Satz von Banach-Alaoglu: $M_c := \{x \in \ell_2 \mid \|x\| \leq c\} \subset \ell_2$ ist schwach folgenkompakt für alle $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: $A := \{x \in \ell_2 \mid \exists N \in \mathbb{N} s.d. x_n = 0 \; \forall n \geq N\}$

Sei $\{a^i\}_{i \in \mathbb{N}} = A$ und $(y^k)_k \subset M_c$

Beweis(1/4)

$|\langle y^k, a^i\rangle| \leq \|y^k\|\|a^i\| \leq c\|a^i\| < \infty$

$(\langle y^k, a^i\rangle)_k$ ist beschränkte Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow$ für festes i hat $(\langle y^k, a^i\rangle)_k$ eine konvergente Teilfolge.

Behauptung: Es existiert eine gemeinsame Teilfolge $(m_j) \subset \mathbb{N}$, sodass $(\langle y^{m_j}, a^i\rangle)_j$ für alle $i \in \mathbb{N}$ konvergiert.

Beweis: Cantor's Diagonaltrick: $\exists (k_j^1)_j \subset \mathbb{N}$ s.d.$(\langle y^{k_j^1}, a^1\rangle)_j$ konvergiert

$\exists (k_j^2)_j \subset (k_j^1)_j$ s.d. $(\langle y^{k_j^2}, a^2\rangle)_j$ konvergiert

$\vdots$

Beweis(2/4)

$(k_j^{n+1})_j \subset (k_j^n)_j \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$m_j := k_j^j \Rightarrow$ Die Teilfolge $(m_j)_j$ erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

$f_{m_j}(x) := (\langle y^{m_j}, x \rangle)\ \forall x \in \ell_2$ und $g(a) := \lim\limits_{j \to \infty} f_{m_j}(a)\ \forall a \in A$

- g ist linear: $g(\alpha a + \beta b) = \lim\limits_{j \to \infty} f_{m_j}(\alpha a + \beta b) = \lim\limits_{j \to \infty} (\alpha f_{m_j}(a) + \beta f_{m_j}(b)) = \alpha g(a) + \beta g(b) \;\; a, b \in A,\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- g ist beschränkt: $|g(a)| = \lim\limits_{j \to \infty} |f_{m_j}(a)| \leq c\|a\|$

$\Rightarrow g \in A^*$

Beweis(3/4)

Setze g auf ℓ_2 fort.

- $G(a) := g(a) \qquad \forall a \in A$
- $G(x) := \lim\limits_{k\to\infty} g(a^k)$, wobei $x \in \ell_2$, $(a^k)_k \subset A$ und $a^k \xrightarrow{k\to\infty} x$

G ist linear, beschränkt und $\|G\| = \|g\|$

$\exists y \in \ell_2$ mit $G(x) = \langle y, x\rangle \qquad \forall x \in \ell_2$

Es gilt: $\langle y^{m_j}, a\rangle \xrightarrow{j\to\infty} \langle y, a\rangle \ \forall a \in A$ Zeige: $y^{m_j} \xrightarrow{w} y$

Beweis(4/4)

$$K := (\|y\| + \underbrace{\sup_{j\in\mathbb{N}} \|y^{m_j}\|}_{\leq c})/2 < \infty$$

$\forall x \in \ell_2\ \exists a \in A$ s.d. $\|x - a\| < \frac{\varepsilon}{3K}$

$$|\langle y^{m_j}, x\rangle - \langle y, x\rangle| \leq |\langle y^{m_j}, x\rangle - \langle y^{m_j}, a\rangle| + |\langle y^{m_j}, a\rangle - \langle y, a\rangle| + |\langle y, a\rangle - \langle y, x\rangle|$$

$$\leq (\|y\| + \sup_{j\in\mathbb{N}} \|y^{m_j}\|)\|x - a\| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow y^{m_j} \xrightarrow{w} y$$

$\Rightarrow M_c$ ist schwach Folgenkompakt