Der Reihenvektorraum ℓ^2

Christian Häckl

LMU München

München am 12. Dezember 2013

ℓ^2 als Hilbertraum

- Definitionen

Der ℓ^2 ist die Menge der Folgen a_k für die $\sum\limits_k |a_k|^2 < \infty$, mit $k \in \mathbb{N}$.

$$\ell^2 = \{a_k \mid \sum_k |a_k|^2 < \infty\}$$

Das Skalarprodukt im ℓ^2 wird folgender Maßen definiert:

$$\langle a, b \rangle = \sum_k a_k \cdot b_k.$$

Mit diesem Skalarprodukt und der Vollständigkeit von ℓ^2 kann man zeigen, dass ℓ^2 ein Hilbertraum ist.

ℓ^2 als Hilbertraum

- Skalarprodukt:

(i) Bilinearität

$$\langle \alpha a + \beta b, c\rangle = \alpha\langle a, c\rangle + \beta\langle b, c\rangle$$
$$\langle a, \alpha b + \beta c\rangle = \alpha\langle a, b\rangle + \beta\langle a, c\rangle$$

mit $a, b, c \in \ell^2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii) Symmetrie

$\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ für $a, b \in \ell^2$

(iii) positiv definit

$\langle a, a\rangle \geq 0$ für alle $a \in \ell^2$ und

$\langle a, a\rangle = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

ℓ^2 als Hilbertraum

- Vollständigkeit:
  jede Cauchyfolge muss in ℓ^2 einen Grenzwert besitzen:
  wähle $a_i \in \ell^2$, wobei a_i Cauchyfolge ist.
  für $(a_{jk} - a_{ik})$ gilt $(a_{jk} - a_{ik}) \to 0$ für $j \to i$
  $\Rightarrow$ jedes a_{ik} ist Cauchyfolge, da abschätzbar gegen $\sum_i a_{ik}$
  $\Rightarrow a_{ik} \to a_k \; \forall a_i \in \ell^2$ und $i \to \infty$, da $a_k \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ vollständig ist.
  Weil a_k in ℓ^2 ist liegt auch der Grenzwert in ℓ^2.
  $\Rightarrow$ Vollständigkeit

  $\Longrightarrow \ell^2$ ist Hilbertraum $\square$

Der Dualraum des ℓ^2

- Definition Dualraum

  Zum Vektorraum ℓ^2 über $\mathbb{R}$ bezeichnet
  $(\ell^2)^*$ den zu ℓ^2 gehörigen Dualraum,
  d.h. die Menge aller linearen Funktionen von ℓ^2 nach $\mathbb{R}$.

  Somit gilt für ein Element aus dem Dualraum:

  $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{R}; b \mapsto \langle a, b \rangle$ für ein $a \in \ell^2$

  $\Rightarrow \varphi \in (\ell^2)^* \Rightarrow \exists a \in \ell^2$,so dass $\varphi(b_l) = \langle a, b \rangle$ ist.

Der Dualraum des ℓ^2

Es existiert eine lineare Abbildung $\varphi : \ell^2 \to \mathbb{R}$, für die gilt:

$\varphi : \ell^2 \to \mathbb{R}; b \mapsto \langle a, b \rangle$ linear

- zeige φ ist beschränkt

  Es gilt:

  $$|\varphi(b)| = |\langle a, b \rangle| = \overset{Cauchy-Ungleichung}{\leq} \|a\|_{\ell^2} \cdot \|b\|_{\ell^2}$$
  $$\Rightarrow \text{da } a \in \ell^2 \text{ fest und } b \in \ell^2 \text{ gilt } \|b\|_{\ell^2} < \infty$$
  $$\Rightarrow \varphi(b) \text{ ist beschränkt.}$$

- Führe $\sup\limits_{\|b\|_{\ell^2} \leq 1} |\varphi(b)| < \infty$ ein.

Der Dualraum des ℓ^2

Beweis für den Reisz'schen Darstellungssatz:

- Wähle $\Phi(a) = \frac{1}{2}\|a\|_{\ell^2}^2 - \varphi(a)$

  Definiere $\delta_c\Phi(b) = \lim\limits_{t\to 0} \Phi(b+tc), \ \forall c \in \ell^2, t \in \{0,1\}$

  $\delta_c\Phi(b) = \lim\limits_{t\to 0}\{\Phi(b) + \frac{t^2}{2}\|c\|_{\ell^2}^2 + t\langle b, c\rangle - t\cdot\varphi(c)\}$

  Es gilt $\Phi(b) \leq \delta_c\Phi(b)$ und b löst:

  (a) $b \in \ell^2 : \langle b, c\rangle = \varphi(c)\ \forall c \in \ell^2$
  (b) $b \in \ell^2 : \Phi(b) = \min\limits_{a\in\ell^2} \Phi(a)$,

  da (b) äquivalent ist zu
  $b \in \ell^2 : \frac{t}{2}\|c\|_{\ell^2}^2 + \langle b, c\rangle - \varphi(c) \geq 0, \ \forall c \in \ell^2, \forall t \in \{0,1\}$
  und da mit $c \in \ell^2$ auch $-c \in \ell^2$ folgt Gleichheit.

Der Dualraum des ℓ^2

- Existenz des Minimums:
  Φ ist nach unten beschränkt:

$$\Phi(a) \geq \frac{1}{2}\|a\|_{\ell^2}^2 - \|\varphi\|_{\ell^{2*}} \cdot \|a\|_{\ell^2} = \frac{1}{2}(\|a\|_{\ell^2} \cdot \|\varphi\|_{\ell^{2*}})^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{\ell^{2*}} \geq \frac{1}{2}\|\varphi\|_{\ell^{2*}}^2$$

$\Rightarrow \exists$ eine Minimalfolge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in ℓ^2 mit
$\lim\limits_{k\to\infty} \Phi(b_k) = \inf\limits_{a\in\ell^2} \Phi(a) > -\infty$

Der Dualraum des ℓ^2

- Existenz des Minimums:

  Die Parallelungleichung liefert:

  $\|b_m - b_n\|_{\ell^2}^2 = 2\|b_m\|_{\ell^2}^2 + 2\|b_n\|_{\ell^2}^2 - \|b_m + b_n\|_{\ell^2}^2 =$

  $4 \cdot \Phi(b_m) + 4 \cdot \Phi(b_n) - 8 \cdot \Phi((b_m + b_n) \cdot \frac{1}{2}) \leq 4 \cdot \Phi(b_m) + 4 \cdot \Phi(b_n) - 8 \cdot \inf_{a \in \ell^2} \Phi(a)$

  für $m, n \to \infty$ gilt:

  $\lim_{m,n \to \infty} \|b_m - b_n\|_{\ell^2}^2 \leq 0 \ \Rightarrow b_n$ ist Cauchyfolge

  da ℓ^2 vollständig, existiert $b := \lim_{n \to \infty} b_n$

  aus der Stetigkeit von Φ folgt $\Phi(b_n) = \inf_{a \in \ell^2} \Phi(a)$

  $\Rightarrow$ Existenz

Der Dualraum des ℓ^2

- Eindeutigkeit:
  wähle $\tilde{b} \in \ell^2$ als weitere Lösung
  $\Rightarrow b - \tilde{b}$ erfüllt die Gleichung $(b - \tilde{b}, c) = 0 \ \forall c \in \ell^2$
  wähle $c = b - \tilde{b} \ \Rightarrow \|b_m - b_n\|^2_{\ell^2} = 0$, also $b = \tilde{b}$.
  $\Rightarrow$ Eindeutigkeit

Der Dualraum des ℓ^2

- Noch zu zeigen $\|b\|_{\ell^2} = \|\varphi\|_{\ell^{2*}}$
  Die Cauchy-Ungleichung liefert: $|\langle b, a\rangle| \leq \|a\|_{\ell^2} \cdot \|b\|_{\ell^2}$
  mit $a := b$ gilt auch: $\sup\limits_{0 \neq a \in \ell^2} |\langle b, a\rangle| \geq \|b\|_{\ell^2}^2$
  $\Rightarrow \|\varphi\|_{\ell^{2*}} = \sup\limits_{0 \neq a \in \ell^2} \frac{\langle \varphi, a\rangle}{\|a\|_{\ell^2}} = \sup\limits_{0 \neq a \in \ell^2} \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|_{\ell^2}} = \|b\|_{\ell^2}$
  $\Rightarrow \ell^2 \cong \ell^{2*}$. $\square$

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Das Fatou-Lemma für den ℓ^2

Das Fatou-Lemma:

Sei $a_k \in \ell^2$ mit Punkten in $\mathbb{R}$.
Gilt $a_k \underset{\textit{konvergiert monoton}}{\nearrow} a$ punktweise, d.h. $a_{lk} \nearrow a_l$ für alle $k \in \mathbb{N}$

dann ist:

$$\sum_k \liminf_{l\to\infty} a_{lk} \leq \liminf_{l\to\infty} \sum_k a_{lk}$$

$$\sum_k a_k \leq \liminf_{l\to\infty} \sum_k a_{lk}.$$

Das Fatou-Lemma für den ℓ^2

Beweis des Fatou-Lemmas:

Wähle $b_{mk} := \inf a_k$, mit $m < l$.

Dann gilt $b_k \nearrow \liminf\limits_{l\to\infty} a_l$ punktweise

$$\overset{\text{nach Satz von Levi}}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{m\to\infty} \sum_k b_{mk} = \sum_k \liminf_{l\to\infty} a_{lk}$$

und es gilt

$$\lim_{m\to\infty} \sum_k b_{mk} \leq \liminf_{l\to\infty} \sum_k a_{lk}$$

$$\Rightarrow \sum_k \liminf_{l\to\infty} a_{lk} \leq \liminf_{l\to\infty} \sum_k a_{lk}$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Literaturverzeichnis

http://aam.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa1_WS01_02/fa1_script.pdf

http://page.math.tu-berlin.de/~baerwolf/num_pde_ss10/vortrag_riesz.darstellungssatz.pdf