Die Poisson-Gleichung

Sophia Grundner-Culemann

LMU München

Bruck am Ziller am 13.12.2013

Übersicht

Dirichlet-Problem zur Poissongleichung

- starkes Problem
  $\rightarrow$ Satz von Riesz: eindeutige schwache Lösung
- allgemeineres Problem
  $\rightarrow$ Satz von Lax-Milgram: eindeutige schwache Lösung

Laplace-Operator $\triangle$

Sei u eine zweimal differnzierbare, reellwertige Funktion.

$$\triangle u = div(\triangle u) = div\begin{pmatrix} {}_1 u \\ \vdots \\ \partial_n u \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\partial_i u)$$

Dirichlet-Problem zur Poisson-Gleichung (starke Version)

$\Omega \subseteqq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt, genügend glatter Rand, $f \in C_0(\bar{\Omega})$

$$\begin{aligned} \triangle u = f & \quad auf\ \Omega \\ \text{u} = 0 & \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Lösung des starken Problems

Gesucht ist eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Bedingung für schwache Lösung (mit Divergenzsatz von Gauß):

$$\int_\Omega \triangle u \eta \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \eta \, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx \qquad \forall \eta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx = - \int_\Omega f \eta \, dx \qquad \forall \eta \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$$

Lösung des starken Problems

Betrachte dazu den Hilbertraum $\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$ der Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit:

- u=0 auf $\partial\Omega$
- u besitzt verallgemeinerte Ableitung $\nabla u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$
- $C_0^\infty \subsetneq \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$ $\qquad$ $(\,\overline{C_0^\infty} = \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)\,)$

$\langle u, v\rangle_{\mathcal{W}_0^{1,2}} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \; dx$ definiert Skalarprodukt auf $\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$

Also folgt für ein $T \in \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)^*$:

$$T\eta := \langle u, \eta\rangle_{\mathcal{W}_0^{1,2}} = -\int_\Omega f\eta \; dx \qquad \forall \in \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$$

Satz von Riesz

Suche also für $T \in \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)^*$ ein $u \in \mathcal{W}_0^{1,2}$, sodass gilt: $T = \langle u, \cdot \rangle$

Darstellungssatz von Riesz:

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbertraum, $T \in H^*$
$\Rightarrow \exists_! u \in H : \langle u, \cdot \rangle = T$ auf H, $\|u\| = \|T\|_\infty$

Also existiert eine eindeutige schwache Lösung für das Problem

$$\triangle u = f \ auf \ \Omega$$
$$\text{u=0 auf } \partial\Omega$$

Verallgemeinerung des Anfangsproblems

Ω, f, u wie zuvor;

$$div(A\nabla u) = f \ auf \ \Omega$$
$$u = 0 \ auf \ \partial\Omega,$$

wobei $A : \Omega \to \mathbb{R}^{dxd}$ eine elliptische Funktion ist:
$\forall z \in H : z^T A(x) z \geqslant c|z|^2 \ und \ \|A(x)\|_\infty \leqslant c$

Bilinearform

Dann definiert

$$\beta(v, w) := \int_\Omega A(\nabla v, \nabla w)\ dx$$

eine Bilinearform auf $\mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$ und es gilt:

$\forall\ x, y \in \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$:
$|\beta(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|\ und\ \beta(x, x) \geq m\|x\|^2$
für Konstanten $0 < m < M < \infty$

Analogie zur starken Version

Analog zum vorherigen Problem:

$$\int_\Omega A(\nabla u, \nabla \eta)\, dx = -\int_\Omega f \eta \, dx \qquad \forall \eta \in \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$$

oder anders:

$$T\eta := \beta(u, \eta) \qquad \forall \eta \in \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega),$$

Darstellungssatz von Lax-Milgram

(H, $\langle \cdot, \cdot \rangle$) Hilbert-Raum, $\beta \in \mathcal{B}(H)$.
Dann gilt:

$$\forall T \in H^* \; \exists_! \, u \in H : \; \beta(u, \cdot) = T \text{ auf H}$$

Beweis:
Zu zeigen:

$$\forall T \in H^* \; \exists_! \, u \in H :$$

$$\mathrm{T} = \langle w, \cdot \rangle = \langle Su, \cdot \rangle = \beta(u, \cdot)$$

Schritt 1

$\beta(x,\cdot) \in H^*$ stetig $\Rightarrow$ mit Riesz: $\exists_! u_x \in H : \beta(x,\cdot) = \langle u_x, \cdot \rangle$.

$S : H \to H, x \mapsto u_x$ bijektiv:

- S injektiv:
  $\|Sx\| \|X\| \geq \langle Sx, x \rangle = \langle u_x, x \rangle = \beta(x,x) \geq m * \|x\|^2$
  $\Rightarrow \|Sx\| \geq m\|x\| \ \Rightarrow ker(S) = \{0\}$
- S surjektiv benötigt:
  - S linear
  - S stetig
    $\|Sx\| = \|\beta(x,\cdot)\| = sup_{y \in \mathcal{B}} |\beta(x,y)| \leq M\|x\|$
    $\Rightarrow \|S\|_\infty < \infty$

Schritt 2

S surjektiv:

- S(H) abgeschlossener Unterraum:
  $Sx_n \to$ Cauchy $\Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{m}\|Sx_n - Sx_m\| \longrightarrow 0$
  S folgenstetig $\Rightarrow Sx = y$
- S(H)=H:
  Annahme: $S(H) \subsetneq H$.
  $\Rightarrow H = S(H) \oplus S(H)^\perp$ und $\exists 0 \neq y \in S(H)^\perp$
  $\Rightarrow \langle Sx, y \rangle = 0$ für alle $x \in H$.
  $\Rightarrow 0 = \langle Sy, y \rangle = \beta(y, y) \geq m\|y\|^2 > 0$
  Widerspruch!

Schritt 3

mit Satz von Riesz:
$f r T \in H^* \exists_! w \in H : T = \langle w, \cdot \rangle$ und da S bijektiv: $\exists_! u \in H : Su = w$.
$\Rightarrow T = \langle w, \cdot \rangle = \langle Su, \cdot \rangle = \beta(u, \cdot)$

Fazit:
Auch für das allgemeine Problem

$$T\eta = \beta(u, \eta) = \int_\Omega A(\nabla u, \nabla \eta)\, dx = -\int_\Omega f\eta\, dx \qquad \forall \eta \in \mathcal{W}_0^{1,2}(\Omega)$$

existiert eine eindeutige schwache Lösung.