Prof. Dr. Lars Diening
Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 19.10.2013

Analysis einer Veränderlichen — Präsenzaufgaben 5

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{((-1)^n-2)n}$$

auf (absolute) Konvergenz.

Aufgabe 2:
Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gelte $a_k \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ auch die Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ folgt.

(b) Zeigen Sie, dass auf die Voraussetzung $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 3:
Es sei

$$x_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j-k=1 \\ -1 & \text{falls } j-k=-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_{jk}\right) \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} x_{jk}\right).$$

Aufgabe 4:
Es sei $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung zu der es ein $d \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$|\tau(k) - k| \leq d$$

gilt (man nennt τ dann eine beschränkte Umordnung). Beweisen Sie, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ konvergiert.