

Analysis einer Veränderlichen — Präsenzaufgaben 4

Aufgabe 1:

Es seien $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$.
- (b) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a < b$.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie, dass die Grenzwerte

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)^{-1}}{k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{100+k^2}{k^4}$$

existieren.

Aufgabe 3:

Es sei $0 \neq a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $c := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$. Folgern Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{c}{a}$.

Aufgabe 4:

Wir betrachten die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)(-1)^k + 1}{k(k-1)}$.

- (a) Finden Sie alle Häufungspunkte.
- (b) Finden Sie Teilfolgen welche gegen die jeweiligen Häufungspunkte konvergieren.
- (c) Bestimmen Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$.