

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 8

Aufgabe 1: (1+1+1+1) Punkte

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$\frac{2}{1 - \sqrt{3}i}, \quad \frac{(1 - i)^2}{1 + i}, \quad (1 - i)^{16} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1 + i} + \frac{2}{1 - i}.$$

Aufgabe 2: (2+2) Punkte

Prüfen Sie die Funktionen

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1 + x^2)^{-1}$ und

(b) $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{-2}$

auf gleichmäßige Stetigkeit.

Aufgabe 3: (2+2+2+2) Punkte

Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \leq d$ und $f([a, b]) = [c, d]$ gibt.

Sei nun f zusätzlich strikt monoton wachsend. Zeigen Sie damit:

(b) $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ist bijektiv.

(c) f^{-1} ist strikt monoton wachsend.

(d) f^{-1} ist stetig.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die jeden Wert von $f([0, 1])$ genau zweimal annimmt.