Prof. Dr. Lars Diening
Sebastian Schwarzacher
Maximilian Wank 22.10.2013

Analysis einer Veränderlichen — Übungsblatt 1

Aufgabe 1: **(1+1+1) Punkte**

Es sei

$$\mathcal{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$$

die Potenzmenge der Menge X. Bestimmen Sie die Potenzmengen von

$$X_1 := \{42, \text{München}, \text{Kaffee}\}, X_2 := \emptyset \text{ und } X_3 := \{\emptyset\}.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es seien X und Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, I eine Indexmenge und $A_\alpha \subset Y$ für alle $\alpha \in I$. Beweisen Sie, dass

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(A_\alpha).$$

Aufgabe 3: **(4+4) Punkte**

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ sei $a_k \in [-1, 0] \subset \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Aussagen

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=0}^{n}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Aufgabe 4: **(2+3) Punkte**

In dieser Aufgabe wird ein Spezialfall für endliche Mengen des Satzes von Cantor, nämlich

$$\#X < \#\mathcal{P}(X)$$

in zwei Schritten bewiesen.

(a) Beweisen Sie $n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion.

(b) Sei nun X eine endliche Menge. Zeigen Sie ebenfalls mit vollständiger Induktion, dass

$$\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}.$$

Abgabe bis Dienstag, den 29.10.2013 um 16:00 Uhr