Harnacksche Ungleichung impliziert Hölderstetigkeit

Daniel Vanella

LMU München

Zillertal / 13.12.2012-16.12.2012

1. Theorem

Sei L ein Differentialoperator mit $Lu = -\sum_{i,j} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u)$, wobei gilt:

- Die Koeffizienten a_{ij} sind messbare Funktionen
- $\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda \mid \xi \mid^2 \; \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$ (Elliptizität)
- $\sum_{i,j} \mid a_{ij}(x) \mid^2 \leq \Lambda^2$ (Beschränktheit)

Ist $u \in W^{1,2}(B)$ harmonisch $(Lu = 0)$, dann folgt $u \in C^{0,\alpha}(B)$.

2. Begriffserklärung

2.1. Die Harnacksche Ungleichung

Seien Ω, Ω' und Ω'' offene Mengen mit $\Omega', \Omega'' \subset\subset \Omega$ und $\Omega'' \subset\subset \Omega'$ und u eine auf Ω' nicht negative Funktion mit $Lu = 0$.
Dann existiert eine Konstante $c = c(\Omega', \Omega'') > 0$, so dass gilt:

$$\sup_{\Omega''} u \leq c \inf_{\Omega''} u$$

2.2. Hölderstetigkeit

Eine auf D $\subset \mathbb{R}^n$ definierte Funktion u: $D \to \mathbb{R}^m$ heißt hölderstetig zum Exponenten α $(0 < \alpha \leq 1)$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, so dass für $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$| u(x_1) - u(x_2) | \leq c \mid x_1 - x_2 |^\alpha$$

3. Vorbereitung für den Beweis

3.1. Definition: Oszillation

Für eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und einen in Ω relativ kompakten Ball $B_r(x) \subset\subset \Omega$ sei die Oszillation von u auf $B_r(x)$ definiert als

$$\operatorname{osc}_{B_r(x)} u := \sup_{x_1, x_2 \in B_r(x)} \mid u(x_1) - u(x_2) \mid$$

$\operatorname{osc}_{B_r(x)}$ gibt also größtmöglichen Abstand zwischen zwei Funktionswerten von u innerhalb des Balls $B_r(x)$ an.

$$\rightarrow osc_{B_r(x)} u = \sup_{B_r(x)} u - \inf_{B_r(x)} u$$

3.2. Lemma

Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft:

$\forall x_0 \in \Omega \ \exists \ r, c > 0, \alpha \in (0,1)$, so dass $\forall x \in B_r(x_0)$ und $\forall s \leq r$ gilt:

$$\operatorname{osc}_{B_s(x)} u \leq cs^\alpha$$

Dann ist u lokal hölderstetig zum Exponenten α.

<u>Beweis:</u>
Seien $x_1, x_2 \in B_r(x_0)$ beliebig, dann gilt:

$x_1, x_2 \in B_s(\frac{1}{2}(x_1 + x_2))$ mit $s := \frac{1}{2} \mid x_1 - x_2 \mid < r$

Abschätzung:
$\mid u(x_1) - u(x_2) \mid \leq \operatorname{osc}_{B_s(\frac{1}{2}(x_1+x_2))} u \leq cs^\alpha = c(\frac{1}{2} \mid x_1 - x_2 \mid)^\alpha =$

$(\frac{1}{2})^\alpha c \mid x_1 - x_2 \mid^\alpha \leq c \mid x_1 - x_2 \mid^\alpha$

Insgesamt:
$\mid u(x_1) - u(x_2) \mid \leq c \mid x_1 - x_2 \mid^\alpha$

$\rightarrow$ Hölderstetigkeit

4. Beweis Theorems

Für die Harnacksche Ungleichung muss gelten:
a) $Lu = 0$
b) $u \geq 0 \rightarrow$ nicht zwingend gegeben
Umgehung:
Setze:

$$M(r) := \sup_{B_r(x)} u$$

$$m(r) := \inf_{B_r(x)} u$$

$\rightarrow$ Statt u verwendet man nun (M(r)-u) und (u-m(r)).

Es gilt:

1. $(M(r) - u) \geq 0$

   $(u - m(r)) \geq 0$

2. $L(M(r) - u) = -\sum_{i,j} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i(M(r) - u)) = 0$

   $L(u - m(r)) = -\sum_{i,j} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i(u - m(r))) = 0$

$\rightarrow$ $(M(r) - u)$ und $(u - m(r))$ erfüllen obige Bedingungen.

Definiere nun drei offene Mengen Ω, Ω'; und Ω'' mit $\Omega', \Omega'' \subset\subset \Omega$ und $\Omega'' \subset\subset \Omega'$.
Wähle

$$\begin{aligned} \Omega &:= B_{2r}(x_0) \\ \Omega' &:= B_r(x) \\ \Omega'' &:= B_{\frac{r}{2}}(x) \end{aligned}$$

wobei $x \in B_r(x_0)$.

Es gilt $B_{\frac{r}{2}}(x) \subset\subset B_r(x) \subset\subset B_{2r}(x_0)$.

Somit kann die Harnacksche Ungleichung nun auf $B_{\frac{r}{2}}(x)$ angewendet werden.

Mit der Harnackschen Ungleichung gilt:

1. $M(r) - m(\frac{r}{2}) = \sup_{B_{\frac{r}{2}}(x)} (M(r) - u) \leq c \inf_{B_{\frac{r}{2}}(x)} (M(r) - u)$

   $= c(M(r) - M(\frac{r}{2}))$

2. $M(\frac{r}{2}) - m(r) = \sup_{B_{\frac{r}{2}}(x)} (u - m(r)) \leq c \inf_{B_{\frac{r}{2}}(x)} (u - m(r))$

   $= c(m(\frac{r}{2}) - m(r))$

Addition beider Ungleichungen mit anschließender Umformung:

$$M(\tfrac{r}{2}) - m(r) + M(r) - m(\tfrac{r}{2}) \leq cM(r) - cM(\tfrac{r}{2}) + cm(\tfrac{r}{2}) - cm(r)$$

$$M(\tfrac{r}{2}) + cM(\tfrac{r}{2}) - m(\tfrac{r}{2}) - cm(\tfrac{r}{2}) \leq cM(r) - M(r) - cm(r) + m(r)$$

$$M(\tfrac{r}{2}) - m(\tfrac{r}{2}) \leq \tfrac{c-1}{c+1}(M(r) - m(r))$$

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}(x)} u - \inf_{B_{\frac{r}{2}}(x)} u \leq \tfrac{c-1}{c+1}\big(\sup_{B_r(x)} u - \inf_{B_r(x)} u\big)$$

$\rightarrow \operatorname{osc}_{B_{\frac{r}{2}}(x)} u \leq \theta \operatorname{osc}_{B_r(x)} u$ mit $\theta = \frac{c-1}{c+1} < 1$

allgemein: $\operatorname{osc}_{B_{2^{-k}r}(x)} u \leq \theta^k \operatorname{osc}_{B_r(x)} u$

Sei nun $0 < s < r$ und $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$2^{-k-1} \leq \tfrac{s}{r} \leq 2^{-k}$$

Da $\theta < 1$, existiert ein $\alpha > 0$ mit $\theta = 2^{-\alpha}$

Abschätzung:

$$\operatorname{osc}_{B_s(x)} u = \operatorname{osc}_{B_{r\frac{s}{r}}(x)} u \leq \operatorname{osc}_{B_{2^{-k}r}(x)} u \leq \theta^k \operatorname{osc}_{B_r(x)} u = (2^{-\alpha})^k \operatorname{osc}_{B_r(x)} u$$

$$= 2^{\alpha}(2^{-\alpha k-\alpha}) \operatorname{osc}_{B_r(x)} u = 2^{\alpha}(2^{-k-1})^{\alpha} \operatorname{osc}_{B_r(x)} u \leq \theta^{-1}(\tfrac{1}{r})^{\alpha} \operatorname{osc}_{B_r(x)} u s^{\alpha}$$

Insgesamt:

$$\operatorname{osc}_{B_s(x)} u \leq \theta^{-1}(\tfrac{1}{r})^{\alpha} \operatorname{osc}_{B_r(x)} u s^{\alpha}$$

Setze nun $\theta^{-1}(\frac{1}{r})^{\alpha} \operatorname{osc}_{B_r(x)} u = c$

$\rightarrow \operatorname{osc}_{B_s(x)} u \leq c s^{\alpha}$

Bedingungen für obiges Lemma (3.2) sind damit erfüllt.
$\rightarrow$ Hölderstetigkeit