Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 16.12.2011

Numerik — Blatt 9

Abgabe: Freitag, den 10. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Parabeliteration **6 Punkte**

Anhand der Parabeliteration bzw. Logistischen Gleichung

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k)$$

sollen Sie erkennen, dass sich schon bei sehr einfach gebauten nichtlinearen Funktionen die Iterationsfolgen in Abhängigkeit der Wahl des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ völlig unterschiedlich verhalten können.

(a) Betrachten Sie die Excel-Datei "variation" und gehen Sie die in der Datei enthaltene Aufgabenstellung durch.

(b) Betrachten Sie die Excel-Datei "wertetabelle" und gehen Sie die in der Datei enthaltene Aufgabenstellung durch.

Hinweis: Etwas Hintergrundwissen erhält der interessierte Student für die Logistische Gleichung bereits beim Lesen des gleichnamigen Wikipedia-Artikels — zudem berücksichtigt dieser den Begriff des „Chaos".

Aufgabe 2: Iteration und Fehlerabschätzung **3+3+1 Punkte**

Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Kettenbrüche mit

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{4+\frac{1}{4}}, x_2 = \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, wenn $x_0 = 0$.
Zeigen Sie, dass die Funktion φ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

(b) Berechnen Sie die Werte $x_1, ..., x_5$ und geben Sie für x_5 den maximalen Fehler mittels der a-priori– sowie der a-posteriori-Abschätzung an.

(c) Bestimmen Sie den Fixpunkt der in a) gefundenen Funktion analytisch.

Aufgabe 3: Gesamtschrittverfahren **3+4 Punkte**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie zwei Schritte des Gesamtschrittverfahrens zum Startvektor $x^{(0)} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$ durch.

(b) Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren in a) konvergiert und geben Sie die a-priori-Fehlerabschätzung für $\|x^{(10)} - x\|_\infty$ an, ohne die Lösung x des Gleichungssystems oder $x^{(10)}$ zu berechnen.