Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 09.12.2010

Numerik — Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, den 16. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Intervall-, Sekanten- und Newtonverfahren — 3 Punkte

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$. Man Berechne die Nullstelle $z = \pi$ bis zu einem Fehler kleiner 10^{-4}

(a) mit der Intervallschachtelung, Startintervall $[2, 4]$

(b) mit dem Sekantenverfahren, Startwerte $x_0 = 2$, $x_1 = 4$

(c) mit dem Newtonverfahren, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit $x_0 = 4$

Aufgabe 2: Newton-Verfahren — 7 Punkte

Die Excel-Datei „Eigenwertproblem mit Newton-Verfahren lösen“ berechnet numerisch Näherungen der Eigenwerte (EW1, EW2, EW3) der dort gegebenen Matrix A. Dies geschieht, indem sich den Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms mit Hilfe des Newton-Verfahrens angenähert wird. Die Newton-Iteration wird für die Startwerte (X_0) $x_0 = 1.0, 1.1, ..., 7.9, 8.0$ durchgeführt, wobei einige uninteressantere Spalten „ausgeblendet“ wurden (Beispielsweise werden die Spalten zwischen Spalte F und N erneut sichtbar, wenn Sie auf den etwas dickeren kleinen Strich zwischen „F“ und „N“ doppelklicken).

(a) Welche Bereiche der komplexen Zahlenebene würden Sie je als Bereich möglicher Startwerte für die Eigenwerte EW1, EW2 und EW3 wählen, wenn Sie den Satz von Gersch-Gorin und die Erkenntnis, dass A positiv definit ist, berücksichtigen?

(b) Zu den Startwerten $x_0 = 2.4, 3.0, 3.7$ wurde die jeweilige fettgedruckte Folge der Iterationswerte $x_0, x_1, x_2, ...$ genauer untersucht. In einem Diagramm wurde dem jeweiligen Iterationsschritt der negative logarithmierte Fehlerbetrag zwischen Grenzwert und zugehörigem Iterationswert (-LOG(ABS(EW - X$_i$))) zugeordnet. Wie ist der Wert von -LOG(ABS(EW - X$_i$)) zu interpretieren (in der Formel wird der 10er Logarithmus verwendet)? Um welchen Faktor vergrößert sich der Wert gegen Ende der Iteration hin zu EW1 bzw. EW3 pro Iterationsschritt in etwa? Erläutern Sie diesen Faktor.
Hinweis: Werfen Sie ein Auge auf die Anzahl korrekter Stellen nach den jeweiligen Iterationsschritten bzw. stellen Sie sich die Frage, an welche Funktion die Diagramme erinnern.

(c) Die Iterationen mit EW2 als Grenzwert benötigen im Schnitt weniger Schritte als die, welche zu EW1 bzw. EW3 führen. Welche Besonderheit zeichnet die Nullstelle EW2 aus?

(d) Sie sollen die Auswertungen in der Datei dazu benutzen, die Größe der Einzugsbereiche der Nullstellen nach oben hin abzuschätzen. Beispielsweise können die rot unterlegten Startwerte zu keinem Einzugsbereich gehören, weil beispielsweise $x_0 = 3.5$ (rot) auf EW1 (etwa 1.7) führt, aber $x_0 = 3.1$ (rot) auf EW3 (etwa $8,3$) führt. Schätzen Sie die Einzugsbereiche noch genauer ab, indem Sie das „Vorhandensein-Müssen" der quadratischen Konvergenz in diesen, berücksichtigen. Sie können die Datei natürlich abändern bzw. erweitern, um die quadratische Konvergenz einfacher ersichtlich zu machen.

(e) In der Datei „Eigenwertproblem mit Newton-Verfahren lösen - mit Dämpfung" wurde eine sehr einfache Dämpfung implementiert. In den ersten beiden Iterationsschritten wird mit dem Faktor 2^{-2} - und in den beiden darauffolgendenden mit Faktor 2^{-1} gedämpft. Erläutern Sie, welcher Vor- und Nachteil sich durch diese Dämpfungsstrategie in der Datei scheinbar ergeben.

(f) Für den Startwert $x_0 = 3.1$ konvergiert das Verfahren noch immer nicht gegen die „richtige" Nullstelle. Variieren Sie den Dämpfungsfaktor 2^{-n}, $n \in \mathbb{N}$ in jedem Iterationsschritt per Hand gerade so, dass die Folge möglichst schnell gegen EW1 oder EW2 konvergiert.

Aufgabe 3: Singulärwertzerlegung berechnen **5 Punkte**

Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 10 & 14 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & -6 & -3 \\ -16 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Minimierungseigenschaft der Pseudoinversen **5 Punkte**

Sei $A = UDV^T$ eine Singulärwertzerlegung.

(a) Zeigen Sie, dass $AA^+A = A$ und $A^+AA^+ = A^+$.

(b) Geben Sie den Wert von $\|A\|_2$ über die Singulärwerte von A an.

Hinweis: Sie dürfen bei dieser Aufgabe verwenden, dass auch für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\|A\|_2 := \sqrt{\max\{\lambda \text{ ist Eigenwert von } A^TA\}} = \sqrt{\rho(A^TA)}.$$