

Numerik — Blatt 7

Abgabe: Mittwoch, den 09. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: LR-Zerlegung**2 Punkte**

Die Excel-Datei „LR“ berechnet die LR-Zerlegung der Matrix A . In der Datei wurde eingestellt, dass nur 2 führende Ziffern angezeigt werden und nur mit „Genauigkeit wie angezeigt“ gerechnet wird. Es wird sozusagen das Rechnen auf einer Rechenmaschine mit zweistelliger Genauigkeit simuliert. Weiter unten wird schließlich das Gleichungssystem $LRx = b$ gelöst. Dabei wird beim Vergleich zur exakten Lösung $x_{ex} = (\frac{100}{199}, \frac{99}{199})$ deutlich, dass ein relativ großer Fehler vorliegt (Zeile 86). Welchen Verbesserungsvorschlag haben Sie?

Die Datei soll Ihnen außerdem ein- bzw. zwei übersichtliche Rechenschemen zeigen, die Sie in dieser Anordnung auch per Hand anwenden können.

Aufgabe 2: Cholesky-Zerlegung**6 Punkte**

Es sei A die in der Excel-Datei „cholesky“ gegebene Matrix. Die Datei berechnet mit Hilfe des „Algorithmus von Cholesky-Croud“ die Cholesky-Zerlegung LL^t der Matrix B . Dieser geht spaltenweise von links nach rechts vor. Für jede Spalte wird erst das neue Diagonalelement und anschließend die darunter stehenden Elemente der Spalte von oben nach unten berechnet.

- Versuchen Sie den Algorithmus in der Datei nachvollziehen zu können: Notieren Sie in der richtigen Reihenfolge, wie a_{11} , a_{21} , a_{31} , ..., a_{43} und a_{44} berechnet werden. Verwenden Sie für jedes a_{ij} eine neue Zeile.
- Notieren Sie analog zu (a) den Algorithmus für eine $n \times n$ -große Matrix A .
- Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der in der Datei gegebenen Zerlegung.

Aufgabe 3: QR-Zerlegung**6 Punkte**

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

mit dem Verfahren von

- Gram-Schmidt
- Housholder

Aufgabe 4: Gauß'sche Ausgleichsrechnung**6 Punkte**

Für einen neu entdeckten Kometen wurden folgende Messungen bezüglich Abstand r_i und Winkel φ_i gemacht:

$$\begin{pmatrix} r_i \\ \cos(\varphi_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2.5 & 1.3 & 1 \\ 0.63 & 0.39 & 0.12 & -0.31 & 0.59 \end{pmatrix}.$$

Seit Kepler wissen wir, dass Kometenbahnen durch die folgende Kegelschnittgleichung beschrieben werden: $r = \frac{p}{1 - e \cos(\varphi)}$.

Hierbei bestimmt die Konstante e , ob die Kometenbahn von elliptischem, $0 \leq e < 1$, parabolischem, $e = 1$ oder hyperbolischem, $e > 1$, Typ ist. Zeigen Sie welchen Typ diese Messungen ergeben würden. Verwenden Sie hierfür die gauß'sche Ausgleichsrechnung: Es gilt die Unbestimmten p und e zu approximieren. Verwende Sie dafür den Ansatz

$$u(\varphi) = \frac{1}{p} - \frac{e}{p} \cos(\varphi) \quad \left(= \frac{1}{r} \right).$$

Berechnen sie mit der Gauß'schen Ausgleichrechnung die Konstanten c_1, c_2 mit $u(\varphi) \approx c_1 + c_2 \cos(\varphi)$. Leiten sie aus dieser Gleichung eine Annäherung von e und p ab. (Es genügen Rundungen auf drei Stellen).