Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 25.11.2010

Numerik — Blatt 6

Abgabe: Mittwoch, den 02. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Simpsonregel **5 Punkte**

Es sei $f \in C^4[a,b]$. Zeigen Sie,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta)$$

für ein $\zeta \in [a,b]$.

Aufgabe 2: Symmetrie der Gewichte **3 Punkte**

Sei $I^n f = \Sigma_{i=0}^n \alpha_i F(x_i)$ eine abgeschlossene Newton-Cotes-Formel n-ter Ordnung. Zeigen Sie, dass ihre Gewichte folgender Symmetriebedingung genügen:

$$\alpha_i = \alpha_{n-i}$$

für alle $i \in \{0, ..., n\}$.

Aufgabe 3: Trapez-Mittelpunkt-Abschätzung 5 Punkte

(a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_a^b x^{9/2} dx$$

für $a = 0$ und $b = 2$ exakt, sowie näherungsweise mit Hilfe der Trapezregel, Mittelpunktregel bzw. Simpsonregel. Berechnen Sie die zu den Quadraturformeln zugehörigen Werte $\frac{1}{12}||f''||_\infty(b-a)^3$, $\frac{1}{24}||f''||_\infty(b-a)^3$ bzw. $\frac{1}{2880}||f^{(4)}||_\infty(b-a)^5$. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Bestimmen Sie unter Verwendung der Trapez- und Mittelpunktregel und Ausnutzung der Konvexität eine obere und untere Schranke für den Wert des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Wenden Sie Ihr Ergebnis auf das Integral aus Teilaufgabe a) an.

Aufgabe 4: Frobeniusmatrizen **4 Punkte**

Sei L_k die unipotente Frobeniusmatrix, deren k-te Spalte gefüllt ist.

(a) Bestimmen Sie L_k^{-1}

(b) Bestimmen Sie das Produkt $L_j L_k$ für $j < k$

Aufgabe 5: LR-Zerlegung **4 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie unter Verwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine unipotente untere Dreiecksmatrix L, eine obere Dreiecksmatrix R und eine Permutationsmatrix P, so dass $PA = LR$.