Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 18.11.2011

Numerik — Blatt 5

Abgabe: Freitag, den 25. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Trigometrische Interpolation **5 Punkte**

Wir betrachte die Vandermondematrix $V \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, welche wir zur Lösung der Trigometrischen Interpolation benötigen:

$$V = (\omega^{lk})_{lk},$$

wobei $\omega = e^{\frac{i2\pi}{n+1}}$, also eine Einheitswurzel ist. Zeigen Sie,

$$V^*V = (n+1)Id.$$

Aufgabe 2: Legendre-Basis **5 Punkte**

Die Legrende-Polynome P_0 sind Lösung der Legrendreschen Differentialgleichung

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Die Polynome sind im Allgemeinen gegeben durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Zeigen Sie, dass diese ein Orthogonalsystem bilden, d.h.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

Aufgabe 3: Splines **5 Punkte**

Sei $f \in C^2[a,b]$. Weiterhin sei s_n der natürliche, cubische Spline mit $s_n(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0,\dots,n$, wobei $x_i := a + ih$ für $i = 0,\dots,n$ und $h := \frac{b-a}{n}$. Zeigen Sie, dass

$$\|f - s_n\|_\infty \le ch^2\|f''\|_\infty.$$

Aufgabe 4: Gerschgorinische Kreisscheiben **5 Punkte**

Zeigen Sie:

(a) Für die Frobeniusbegleitmatrix $F \in \mathbb{R}^{m\times m}$,

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{m-2} & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

gilt

$$\det(F - zI) = (-1)^m\{z^m + a_{m-1}z^{m-1} + ... + a_1 + a_0\},$$

$z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Führen Sie einen Induktionsbeweis nach $m \in \mathbb{N}$ durch und entwickeln Sie $\det(F - zI)$ nach der ersten Spalte.

(b) Die Vereinigung $K := \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ der Kreisscheiben

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{k=1, k \neq i}^{m} |a_{ik}| \right\}, \ i = 1, ..., m,$$

enthält sämtliche Eigenwerte der Matrix A.
Hinweis: Betrachten Sie eine Zeile der Eigenwertbeziehung $Ax = \lambda x$.