Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 11.11.2011

Numerik — Blatt 4

Abgabe: Freitag, den 18. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

die Vandermonde-Matrix, die bei der Polynominterpolation eine Rolle spielt. Zeigen Sie, dass für ihre Determinante gilt

$$\det(V) = \prod_{i,j=0;i>j}^{n} (x_i - x_j).$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Seien $L_i, i \in \{0, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}_0$, die Lagrange'schen Basispolynome zu den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n, n \in \mathbb{N}_0$, mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(b) Zeigen Sie: Setzt man $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i := L_i(x)$, so ist $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ gerade die i-te Spalte der Inversen der zu $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gehörenden Vandermonde-Matrix.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Im Rahmen dieser Aufgabe soll der Halbkreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 2 vorerst mit einem Polynom vierten- bzw. Polynom sechsten Grades in einer Excel-Datei interpoliert werden. Anschließend mit der Hermite'schen Interpolation und einem Spline. In der Datei sehen Sie links die auf mehrere Stellen genau berechneten Werte der Kreisfunktion. Oberhalb der Grafik werden die Dividierten Differenzen (fett und fett eingerahmt) für das Polynom vierten Grades berechnet, indem man die gewünschten Stützstellen einträgt. Rechts neben der Grafik werden in einer Tabelle die auf mehrere Stellen genauen Werte der Interpolantenfuktion angezeigt. Ganz rechts werden die Fehlerquadrate zwischen Kreisfunktion und Interpolant gebildet und unten schließlich aufsummiert. Machen Sie sich mit der Datei vertraut und den Formeln, die in den Feldern stehen. Vor allem die Formeln in B4, E4, F5, G6, H7, I8, N4 und Q4 sollen Sie nachvollziehen können - der Rest ergibt sich durch einfaches „Herunterziehen“ der jeweiligen Formel.

(a) Variieren Sie die grün und fett hervorgehobenen Stützstellen symmetrisch und beobachten Sie dabei die Summe der Fehlerquadrate. Für **welche Wahl der Stützstellenverteilung** aus

$$\{(-1.0, 1.0), (-1.1/1.1), \ldots, (-1.8/1.8)\}$$

wird der Wert minimal? Etwa für die zu vermutende äquidistante Verteilung der Knoten auf $-2, -1, 0, 1, 2$? Wie lauten die entsprechenden fetten und fett eingerahmten **dividierten Differenzen**

(b) Auf der Seite (Google-Suche „Tschebyscheff Knoten“ ⇒ Erster Treffer)

http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/beispiel/beispiel1038/

finden Sie Informationen über eine gute Wahl der Stützstellenverteilung. Modifizieren Sie die Excel-Datei in der Art, so dass die Kreisfunktion nun durch einen Interpolanten sechsten Grades approximiert wird. Erinnern Sie sich dabei an die in der Vorlesung gestellten Frage „Wie ändert sich das Dreieckschema bei Hinzunahme von weiteren Knoten?“ bzw. deren Antwort. Bei **welcher Stützstellenwahl** $(-2, -b, -a, 0, a, b, 2)$ erwarten Sie nun eine kleine Summe der Fehlerquadrate? Verifizieren Sie dies, indem Sie die **Summe der Fehlerquadrate für die Stützstellenwahlen** $(-2, -b, -a, 0, a, b, 2), (-2, -b - 0.1, -a, 0, a, b + 0.1, 2), (-2, -b + 0.1, -a, 0, a, b - 0.1, 2), (-2, -b, -a - 0.1, 0, a+0.1, b, 2), (-2, -b, -a+0.1, 0, a-0.1, b, 2)$ mit Hilfe Ihrer Excel-Datei ermitteln. Wie lauten die entsprechenden fetten und fett eingerahmten **dividierten Differenzen**?

(c) Ermitteln Sie das **Hermite'sche Interpolationspolynom** h für die Stützstellenwahl $(-2, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ mit den Stützwerten $(0, \sqrt{2}, 1, 2, \sqrt{2}, -1, 0)$. Erweitern Sie die Excel-Datei rechts um eine weitere, entsprechende Tabelle „Fehlerquadrate $[f(x) - h(x)]^2$“ für das gewonnene Hermitesche Interpolationspolynom. Geben Sie die **Summe der Fehlerquadrate** an.

(d) Ermitteln Sie den zu Aufgabe c) entsprechenden **Spline** s, welcher durch die Punkte $(-2, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 2), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (2, 0)$ verläuft und an der Stützstelle $-\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{2}$ den Ableitungswert 1 bzw. -1 hat. Erweitern Sie die Excel-Datei rechts um eine weitere, entsprechende Tabelle „Fehlerquadrate $[f(x) - s(x)]^2$“ für den gewonnenen Spline. Geben Sie die **Summe der Fehlerquadrate** an.

Hinweis zur Abgabe: Ein Ausruck der verschiedenen Excel-Datei-Modifikationen ist nicht notwendig. Ausreichend ist, wenn Sie die in der Aufgabenstellung fettgedruckten Funktionen bzw. Zahlenwerte auf einem Blatt notieren und dieses wie gewöhnlich abgeben.