Prof. Lars Diening, Sebastian Schwarzacher, Hans Irl 28.11.2011

Numerik — Blatt 2

Abgabe: Freitag, den 4. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit und symmetrisch. Zeigen sie, dass dann

$$\lambda_{\min} = \inf_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|_2^2} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|_2^2} = \lambda_{\max},$$

wobei $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$ den kleinsten bzw. größten Eigenwert von A bezeichnet. Hinweis: Jede symmetrische Matrix A ist orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert also eine Diagonalmatrix von Eigenwerten D und eine orthogonale Matrix Q, so dass $A = Q^T DQ$.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Wir betrachten die $n \times n$-Matrix:

$$L := \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $1 \leq \|L\|_2 \leq 2$.

(b) Berechnen sie L^{-1}.

(c) Zeigen Sie, dass es Konstanten $c, C > 0$ gibt mit $c\,n \leq \|L^{-1}\|_2 \leq C\,n$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Es sei $A = LL^T$. Zeigen Sie (mit Hilfe der Aufgabe 2), dass

(a) $\|A^{-1}\|_2 \leq cn^2$,

(b) $\mathrm{cond}_2(A) \leq cn^2$, wobei $\mathrm{cond}_2(A) := \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$,

(c) es gibt $c \geq c' > 0$, so dass für alle $x \neq 0$

$$\frac{c'}{n^2} \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|_2^2} \leq c.$$

(Bemerkung: Vergleichen Sie die Matrix mit der aus Aufgabe 3 Blatt 1.)

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\|AB\|_{\text{Frob.}} \leq \|A\|_{\text{Frob.}} \|B\|_{\text{Frob.}}$$