

Numerik — Blatt 11

Abgabe: Freitag, den 27. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: CG-Verfahren mit Excel**6 Punkte**

Das cg-Verfahren kann man als Algorithmus wie folgt notieren

Zu einer gegebenen Startnäherung $x^{(0)}$ für x^* berechne $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$. Für $m = 1, 2, \dots$

$$(1) \text{ Falls } m = 1, \text{ setzt } p^{(1)} = r^{(0)}$$

$$\text{ Falls } m > 1, \text{ setzt } \beta_m = \frac{\langle r^{(m-1)}, r^{(m-1)} \rangle}{\langle r^{(m-2)}, r^{(m-2)} \rangle}$$

$$\text{ und } p^{(m)} = r^{(m-1)} + \beta_m p^{(m-1)}$$

$$(2) \text{ Bestimme } \alpha_m = \frac{\langle r^{(m-1)}, r^{(m-1)} \rangle}{\langle p^{(m)}, Ap^{(m)} \rangle}$$

$$(3) \text{ Setze } x^{(m)} = x^{(m-1)} + \alpha_m p^{(m)}$$

$$(4) \text{ Berechne } r^{(m)} = r^{(m-1)} - \alpha_m Ap^{(m)}$$

In der Excel-Datei „cg-Verfahren“ ist dieses für eine 4×4 Matrix bis $m = 2$ implementiert. Es sei angemerkt, dass sich bei der Anordnung von Matrix und Vektor bei Matrix-Vektor-Multiplikationen am sogenannten „Falkschen Schema“ orientiert wurde (siehe z.B. wikipedia).

(a) Vervollständigen Sie die Datei bis $m = 4$.(b) Geben Sie $x^{(4)}$ an. Ist $R^{(4)} = 0$? Falls ja - warum? Falls nicht - warum?

Hinweis: Ein mit Java-Appletts ausgeschmückter Vergleich zwischen dem Verfahren des steilsten Abstiegs und dem cg-Verfahren findet sich unter <http://www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/EModule/cgprisma/>.

Aufgabe 2: Wiederholung Konditionszahlen**3 Punkte**Bestimmen Sie die relativen Konditionszahlen k_{ij} der Abbildung $f(x) := Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $x \in \mathbb{R}^2$ **Aufgabe 3: Wiederholung Normen****2 Punkte**Sei Q eine orthonormale Matrix, d.h. $Q^T Q = I$. Zeigen Sie, dass $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ für alle x , $\|Q\|_2 = 1$ und $\text{cond}_2(Q) = 1$.**Aufgabe 4: Wiederholung Iterations-Verfahren****4 Punkte**

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Problem $Ax = b$. Bestimmen Sie die Iterationsmatrizen des Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahrens und ihre Spektralradien. Für welche a konvergieren jeweils die Verfahren?